ОЛИМПИАДА "БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ – БУДУЩЕЕ НАУКИ" 2023-2024
Физика, II тур

10 класс

1. (25 баллов) Брошенное в момент $t = 0$ под углом к горизонту тело оказалось на одной высоте в моменты t_1 и t_2. Найти максимальную высоту подъема тела. Ускорение свободного падения равно g.

Ответ. Максимальная высота подъема равна $g(t_1 + t_2)^2/8$.

Решение 1. Вершина параболической траектории тела расположена симметрично относительно точек, в которых тело оказалось в моменты времени t_1 и t_2, следовательно в вершине тело находилось в момент времени $(t_1 + t_2)/2$. Найденное время равно времени падения тела из верхней точки до земли $t_{\text{пад}} = (t_1 + t_2)/2$. Поскольку падение происходит без начальной скорости по вертикали, то максимальную высоту, с которой падает тело, можно найти как $H = gt_{\text{пад}}^2/2 = g(t_1 + t_2)^2/8$.

Разбалловка 1. Найден момент времени достижения вершины траектории – 10 баллов.
Указано, что найденное время равно времени падения – 5 баллов.
Найдена максимальная высота подъема – 10 баллов.

Решение 2. Введем вертикальную ось y и запишем координаты тела в моменты времени t_1 и t_2 в виде

$$y_1 = V_0 \sin\alpha\, t_1 - \frac{gt_1^2}{2}, \qquad y_2 = V_0 \sin\alpha\, t_2 - \frac{gt_2^2}{2},$$

где V_0 – начальная скорость тела, α – угол, под которым бросили тело. Из условия $y_1 = y_2$ получаем уравнение

$$V_0 \sin\alpha\, t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = V_0 \sin\alpha\, t_2 - \frac{gt_2^2}{2},$$

которое приводим к виду

$$\frac{g(t_2^2 - t_1^2)}{2} = V_0 \sin\alpha\, (t_2 - t_1).$$

Сокращая на $t_2 - t_1$, находим

$$V_0 \sin\alpha = \frac{g(t_2 + t_1)}{2}$$

Подставляя найденное выражение в формулу для максимальной высоты

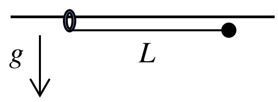
$$H = \frac{(V_0 \sin\alpha)^2}{2g},$$

окончательно получаем

$$H = \frac{g(t_2 + t_1)^2}{8}.$$

Разбалловка 2. Записаны формулы для y_1 и y_2 – 5 баллов.
Из условия $y_1 = y_2$ найдено выражение для $V_0 \sin\alpha$ – 10 баллов.
Записано общее выражение для максимальной высоты– 5 баллов.
Выражена максимальная высота через данные задачи – 5 баллов.

2. (25 баллов) Невесомый стержень длины L шарнирно соединен с кольцом, которое может скользить без трения по неподвижной горизонтальной спице. К концу стержня прикреплен шарик, масса которого равна массе кольца. Первоначально кольцо и шарик удерживают, причем шарик находится на уровне спицы (см. рис.). Затем шарик освобождают, а после того, как он опускается на $L/2$, освобождают и кольцо. Найти максимальную скорость кольца. Ускорение свободного падения равно g.



Ответ. Максимальная скорость кольца равна $\left(1 + \sqrt{15}\right)\sqrt{gL}/4$.

Решение. Вначале найдем скорость шарика V_0 в момент освобождения кольца. Для этого запишем закон сохранения механической энергии в виде

$$\frac{mV_0^2}{2} = mg\frac{L}{2},$$

где m – масса шарика, откуда получаем $V_0 = \sqrt{gL}$. Скорость шарика направлена перпендикулярно стержню, ее горизонтальная компонента равна $V_0/2$.

Скорость кольца достигает максимумов в те моменты времени, когда стержень вертикален. Действительно, в эти моменты горизонтальная компонента силы, действующей на кольцо со стороны стержня, обращается в нуль, а значит в нуль обращается и ускорение кольца, что соответствует максимуму скорости. (При движении к вертикальному положению стержень всегда разгоняет кольцо, так что минимума скорости кольца в этом положении не может быть.) При первом прохождении стержнем вертикального положения шарик движется в направлении горизонтальной компоненты его скорости в момент освобождения кольца, а кольцо – в противоположном направлении. Из закона сохранения горизонтальной компоненты импульса следует, что скорость кольца меньше скорости шарика в этот момент. При втором прохождении стержнем вертикального положения направления скоростей шарика и кольца меняются на противоположные, при этом для сохранения горизонтальной компоненты импульса системы скорость кольца должна быть больше скорости шарика. Именно в этом положении скорость кольца достигает абсолютного максимума.

Для второго прохождения стержнем вертикального положения запишем закон сохранения импульса в проекции на горизонтальное направление

$$mV_к - mV_ш = m\frac{V_0}{2}$$

($V_к$ и $V_ш$ – скорости кольца и шарика), а также закон сохранения механической энергии

$$\frac{mV_к^2}{2} + \frac{mV_ш^2}{2} = mgL.$$

Выражая из первого уравнения скорость шарика как $V_ш = V_к - \frac{V_0}{2}$ и подставляя это выражение во второе уравнение, получаем квадратное уравнение относительно скорости кольца

$$2V_к^2 - \sqrt{gL}V_к - \frac{7}{4}gL = 0.$$

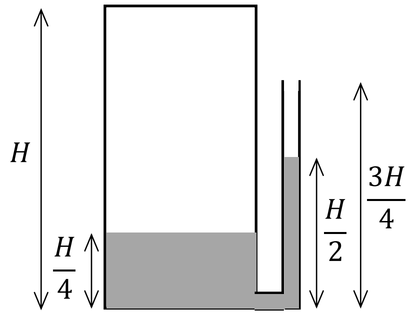
Решая квадратное уравнение, находим

$$V_к = \frac{1 \pm \sqrt{15}}{4}\sqrt{gL},$$

где следует выбрать верхний знак (нижний знак соответствует первому вертикальному положению стержня).

Разбалловка. Понято, в какой момент скорость кольца достигает абсолютного максимума – 10 баллов.
Записан закон сохранения импульса для вертикального положения стержня – 5 баллов.
Записан закон сохранения энергии для вертикального положения стержня – 5 баллов.
Найдена максимальная скорость – 5 баллов.

3. (25 баллов) Цилиндрический сосуд с площадью поперечного сечения S и высотой H заполнен ртутью (до уровня $H/4$) и одноатомным газом (см. рис.). Сообщающаяся с сосудом тонкая трубка высотой $3H/4$ заполнена ртутью до уровня $H/2$ и открыта в атмосферу. Атмосферное давление равно $\rho gH/2$, где ρ - плотность ртути, g – ускорение свободного падения. Какое количество теплоты следует подвести к газу, чтобы вытеснить ртуть из сосуда? Передачу тепла от газа стенкам сосуда и ртути считать пренебрежимо малой.

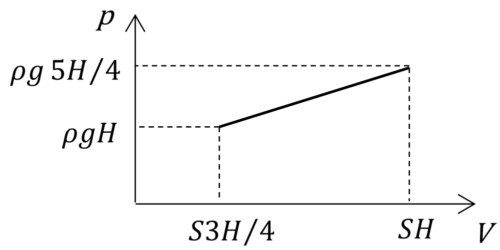


Ответ. Необходимо подвести количество теплоты, равное

$$\frac{21}{16}\rho g H^2 S.$$

Решение.

При нагревании газа его объем вначале (до заполнения трубки ртутью) практически не будет меняться (объем трубки мал по сравнению с объемом ртути в сосуде), а давление газа будет расти от значения $\rho g\, H/2 + (\rho g\, H/2 - \rho g\, H/4) = \rho g\, 3H/4$ до $\rho g\, H/2 + (\rho g\, 3H/4 - \rho g\, H/4) = \rho g H$. При дальнейшем нагревании газа его объем V будет увеличиваться от начального значения $S3H/4$ до значения SH, соответствующего полному вытеснению ртути из сосуда, а давление p будет расти линейно от $\rho g H$ до $\rho g\, 5H/4$ (см. рис.).



Согласно первому принципу термодинамики полученное газом тепло Q идет на увеличение внутренней энергии газа ΔU и совершение газом работы A: $Q = \Delta U + A$. Увеличение внутренней энергии запишем как $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1)$, где T_1 – начальная температура газа, T_2 – конечная (после заполнения газом всего сосуда) температура, ν – число молей газа, а R – молярная газовая постоянная. С учетом уравнения Клапейрона-Менделеева данное выражение можно преобразовать к виду

$$\Delta U = \frac{3}{2}\left(\rho g \frac{5H}{4} SH - \rho g \frac{3H}{4} S \frac{3H}{4}\right) = \frac{33}{32}\rho g H^2 S.$$

Работу газа находим как площадь под графиком $p(V)$ (площадь трапеции):

$$A = \frac{1}{2}\left(\rho g H + \rho g \frac{5H}{4}\right)\left(SH - S\frac{3H}{4}\right) = \frac{9}{32}\rho g H^2 S.$$

Суммируя ΔU и A, находим искомое количество теплоты

$$Q = \frac{21}{16}\rho g H^2 S.$$

Разбалловка. Понято наличие участка изохорного нагревания газа – 5 баллов.
Найдено приращение внутренней энергии – 5 баллов.
Найдена работа газа – 10 баллов.
Получен ответ – 5 баллов.

4. (25 баллов) Имеются 2024 резистора с одинаковыми сопротивлениями R. Предложите схему их соединения в цепь с общим сопротивлением $6R$.

Ответ. Цепь может состоять из следующих последовательно соединенных участков: 44 участков по 44 соединенных параллельно резистора, 9 участков по 9 соединенных параллельно резисторов, 2 участков по 2 соединенных параллельно резистора, 3 последовательно соединенных резисторов.

Решение. Будем исходить из следующей идеи. Если N резисторов соединить параллельно, а затем N таких составных резисторов соединить последовательно, то сопротивление полученной цепи из N^2 резисторов будет равно сопротивлению одного резистора R. Подберем максимальное число N, при котором $N^2 < 2024$. Получим $N = 44$ и $N^2 = 1936$. Остается $2024 - 1936 = 88$ резисторов. Подберем число N, при котором $N^2 < 88$. Получим $N = 9$. Остается 7 резисторов. Подберем число N, при котором $N^2 < 7$. Получим $N = 2$. Остается 3 резистора, которые соединим последовательно.

Разбалловка. Записаны общие формулы для параллельного
и последовательного соединения резисторов – 5 баллов.
Предложена идея решения – 10 баллов.
Указана схема соединения – 10 баллов.