ОЛИМПИАДА “БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ – БУДУЩЕЕ НАУКИ” 2023-2024
Физика, II тур

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ И РАЗБАЛЛОВКИ

11 класс

1. (25 баллов) Брошенное в момент $t = 0$ под углом к горизонту тело оказалось на одной высоте в моменты t_1 и t_2. Найти максимальную высоту подъема тела. Ускорение свободного падения равно g.

Ответ. Максимальная высота подъема равна $g(t_1+t_2)^2/8$.

Решение 1. Вершина параболической траектории тела расположена симметрично относительно точек, в которых тело оказалось в моменты времени t_1 и t_2, следовательно в вершине тело находилось в момент времени $(t_1+t_2)/2$. Найденное время равно времени падения тела из верхней точки до земли $t_{\text{пад}} = (t_1+t_2)/2$. Поскольку падение происходит без начальной скорости по вертикали, то максимальную высоту, с которой падает тело, можно найти как $H = gt_{\text{пад}}^2/2 = g(t_1+t_2)^2/8$.

Разбалловка 1. Найден момент времени достижения вершины траектории – 10 баллов.
Указано, что найденное время равно времени падения – 5 баллов.
Найдена максимальная высота подъема – 10 баллов.

Решение 2. Введем вертикальную ось y и запишем координаты тела в моменты времени t_1 и t_2 в виде

$$y_1 = V_0 \sin\alpha\, t_1 - \frac{gt_1^2}{2}, \qquad y_2 = V_0 \sin\alpha\, t_2 - \frac{gt_2^2}{2},$$

где V_0 – начальная скорость тела, α – угол, под которым бросили тело. Из условия $y_1 = y_2$ получаем уравнение

$$V_0 \sin\alpha\, t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = V_0 \sin\alpha\, t_2 - \frac{gt_2^2}{2},$$

которое приводим к виду

$$\frac{g(t_2^2 - t_1^2)}{2} = V_0 \sin\alpha\,(t_2 - t_1).$$

Сокращая на $t_2 - t_1$, находим

$$V_0 \sin\alpha = \frac{g(t_2+t_1)}{2}$$

Подставляя найденное выражение в формулу для максимальной высоты

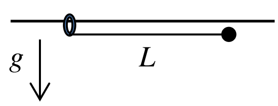
$$H = \frac{(V_0 \sin\alpha)^2}{2g},$$

окончательно получаем

$$H = \frac{g(t_2+t_1)^2}{8}.$$

Разбалловка 2. Записаны формулы для y_1 и y_2 – 5 баллов.
Из условия $y_1 = y_2$ найдено выражение для $V_0 \sin\alpha$ – 10 баллов.
Записано общее выражение для максимальной высоты– 5 баллов.
Выражена максимальная высота через данные задачи – 5 баллов.

2. (25 баллов) Невесомый стержень длины L шарнирно соединен с кольцом, которое может скользить без трения по неподвижной горизонтальной спице. К концу стержня прикреплен шарик, масса которого равна массе кольца. Первоначально кольцо и шарик удерживают, причем шарик находится на уровне спицы (см. рис.). Затем шарик освобождают, а после того, как он опускается на $L/2$, освобождают и кольцо. Найти максимальную скорость кольца. Ускорение свободного падения равно g.



Ответ. Максимальная скорость кольца равна $\left(1+\sqrt{15}\right)\sqrt{gL}/4$.

Решение. Вначале найдем скорость шарика V_0 в момент освобождения кольца. Для этого запишем закон сохранения механической энергии в виде

$$\frac{mV_0^2}{2} = mg\frac{L}{2},$$

где m – масса шарика, откуда получаем $V_0 = \sqrt{gL}$. Скорость шарика направлена перпендикулярно стержню, ее горизонтальная компонента равна $V_0/2$.

Скорость кольца достигает максимумов в те моменты времени, когда стержень вертикален. Действительно, в эти моменты горизонтальная компонента силы, действующей на кольцо со стороны стержня, обращается в нуль, а значит в нуль обращается и ускорение кольца, что соответствует максимуму скорости. (При движении к вертикальному положению стержень всегда разгоняет кольцо, так что минимума скорости кольца в этом положении не может быть.) При первом прохождении стержнем вертикального положения шарик движется в направлении горизонтальной компоненты его скорости в момент освобождения кольца, а кольцо – в противоположном направлении. Из закона сохранения горизонтальной компоненты импульса следует, что скорость кольца меньше скорости шарика в этот момент. При втором прохождении стержнем вертикального положения направления скоростей шарика и кольца меняются на противоположные, при этом для сохранения горизонтальной компоненты импульса системы скорость кольца должна быть больше скорости шарика. Именно в этом положении скорость кольца достигает абсолютного максимума.

Для второго прохождения стержнем вертикального положения запишем закон сохранения импульса в проекции на горизонтальное направление

$$mV_{\text{к}} - mV_{\text{ш}} = m\frac{V_0}{2}$$

($V_{\text{к}}$ и $V_{\text{ш}}$ – скорости кольца и шарика), а также закон сохранения механической энергии

$$\frac{mV_{\text{к}}^2}{2} + \frac{mV_{\text{ш}}^2}{2} = mgL.$$

Выражая из первого уравнения скорость шарика как $V_{\text{ш}} = V_{\text{к}} - \frac{V_0}{2}$ и подставляя это выражение во второе уравнение, получаем квадратное уравнение относительно скорости кольца

$$2V_{\text{к}}^2 - \sqrt{gL}V_{\text{к}} - \frac{7}{4}gL = 0.$$

Решая квадратное уравнение, находим

$$V_{\text{к}} = \frac{1 \pm \sqrt{15}}{4}\sqrt{gL},$$

где следует выбрать верхний знак (нижний знак соответствует первому вертикальному положению стержня).

Разбалловка. Понято, в какой момент скорость кольца достигает абсолютного максимума – 10 баллов.
Записан закон сохранения импульса для вертикального положения стержня – 5 баллов.
Записан закон сохранения энергии для вертикального положения стержня – 5 баллов.
Найдена максимальная скорость – 5 баллов.

3. (25 баллов) В однородном электрическом поле расположили два точечных заряда $+q$ и $-q$ так, что поле стало равным нулю в двух точках, находящихся на расстоянии L друг от друга, а разность потенциалов между этими точками уменьшилась в два раза. Найти расстояние между зарядами и напряженность однородного поля.

Ответ. Расстояние равно $\sqrt{3}L$. Напряженность однородного поля равна $\frac{2q}{\pi\varepsilon_0 L^2}$, где ε_0 – электрическая постоянная.

Решение. Для того, чтобы электрическое поле стало равным нулю в двух точках, заряды следует расположить на одной силовой линии однородного поля так, чтобы между зарядами их поля были направлены против однородного поля. При этом точки с нулевым полем будут расположены между зарядами симметрично относительно середины соединяющего заряды отрезка (на равном расстоянии $L/2$ от середины). Обозначим напряженность однородного поля через E_0, а искомое расстояние между зарядами через x. Запишем условие равенства поля нулю в указанных точках в виде

$$\frac{q}{\pi\varepsilon_0(x+L)^2}+\frac{q}{\pi\varepsilon_0(x-L)^2}=E_0,$$

где ε_0 – электрическая постоянная, и преобразуем его к виду

$$\frac{2q(x^2+L^2)}{\pi\varepsilon_0(x^2-L^2)^2}=E_0.$$

Далее запишем условие уменьшения вдвое разности потенциалов между точками как

$$\frac{q}{\pi\varepsilon_0(x+L)}-\frac{q}{\pi\varepsilon_0(x-L)}+E_0L=\frac{1}{2}E_0L$$

и приведем его к виду

$$\frac{4q}{\pi\varepsilon_0(x^2-L^2)}=E_0.$$

Исключая E_0 из двух записанных уравнений, находим $x=\sqrt{3}L$. Подставляя найденное x в любое из двух уравнений, получаем

$$E_0=\frac{2q}{\pi\varepsilon_0L^2}.$$

Разбалловка. Понято расположение зарядов – 5 баллов.
Записано условие равенства поля нулю – 5 баллов.
Записано условие уменьшения разности потенциалов вдвое – 5 баллов.
Найдено расстояние между зарядами – 5 баллов.
Найдена напряженность однородного поля – 5 баллов.

4. (25 баллов) К вбитому в потолок гвоздю привязали на нитях длиной L два груза так, чтобы получившиеся маятники могли совершать колебания во взаимно перпендикулярных плоскостях. Для возбуждения колебаний оба маятника отклонили на небольшой угол θ_0 от вертикали, затем отпустили один из них, а когда тот достиг угла $\theta_0/2$, отпустили и второй. Каким будет максимальное расстояние между грузами в процессе колебаний? Через какое время после начала движения это расстояние будет достигнуто в первый раз? Ускорение свободного падения равно g.

Ответ. Максимальное расстояние равно $L\theta_0\sqrt{\frac{3}{2}}$ и в первый раз достигается через время $\frac{5\pi}{6}\sqrt{\frac{L}{g}}$ после начала движения второго маятника.

Решение. В силу малости углов отклонения маятников можно пренебречь смещением грузов по вертикали и считать, что они движутся в горизонтальной плоскости. Вводя в этой плоскости взаимоперпендикулярные оси x и y вдоль направлений движения маятников, зависимости от времени координат грузов можно записать в виде

$$x=L\theta_0\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right),\qquad y=L\theta_0\cos\omega t,$$

где использовано примерное равенство $\sin\theta_0\approx\theta_0$ и начальная фаза колеблющегося вдоль оси x маятника подобрана такой, чтобы в момент $t=0$ угол его отклонения равнялся $\theta_0/2$ (в этот момент другой маятник только начинает движение от положения максимального отклонения). Сначала грузы будут сближаться друг с другом: с момента $t=0$ до момента $\omega t=\frac{\pi}{3}$, когда они окажутся на одинаковом расстоянии $L\theta_0/2$ от положения равновесия ($x=-L\theta_0/2,\ y=L\theta_0/2$) и будут иметь одинаковые по величине скорости. Действительно, в этот момент проекции скоростей грузов на соединяющую их линию будут равны, и, следовательно, скорость сближения грузов обратится в нуль, что означает достижение минимума расстояния между грузами. После этого расстояние между грузами станет увеличиваться до момента $\omega t=\frac{5\pi}{6}$, когда грузы опять окажутся на одинаковом расстоянии от положения равновесия ($x = -\sqrt{3}L\theta_0/2$, $y = -\sqrt{3}L\theta_0/2$) и будут иметь одинаковые по величине скорости. В этот момент расстояние между грузами максимально и равно

$$R_{\max} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}L\theta_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}L\theta_0}{2}\right)^2} = L\theta_0\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Учитывая, что для математического маятника $\omega = \sqrt{g/L}$, находим момент достижения максимального расстояния

$$t = \frac{5\pi}{6}\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Максимальное расстояние между грузами и момент его достижения могут быть также найдены исследованием на экстремум функции $x^2 + y^2$ с помощью производной.

Разбалловка. Записаны зависимости от времени углов или координат маятников – по 5 баллов за маятник.
Найден момент достижения максимального расстояния – 10 баллов.
Найдено максимальное расстояние – 5 баллов.