

Физика, I тур, вариант 1

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ И РАЗБАЛЛОВКИ

10 класс

1. (30 баллов) Одно тело бросили с поверхности земли под углом α к горизонту с начальной скоростью V_0 , а другое – из конечной точки траектории первого с запаздыванием на время T так, что оно полетело по той же траектории в обратном направлении. На какой высоте произойдет встреча тел? Ускорение свободного падения равно g .

Ответ. На высоте $\frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} - \frac{gT^2}{8}$.

Решение. Запишем горизонтальную (x) и вертикальную (y) координаты брошенного первым тела в зависимости от времени t , отсчитываемого от момента броска этого тела, как

$$x_1 = V_0 \cos \alpha t, \quad y_1 = V_0 \sin \alpha t - gt^2/2.$$

Чтобы брошенное вторым тело полетело по той же траектории, что и первое, его начальная скорость и угол броска должны быть теми же. Тогда координаты второго тела могут быть записаны как

$$x_2 = L - V_0 \cos \alpha (t - T), \quad y_2 = V_0 \sin \alpha (t - T) - g(t - T)^2/2,$$

где $L = V_0^2 \sin 2\alpha/g$ – дальность полета тел. Записывая условие встречи тел как $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$, находим момент встречи тел

$$t_0 = \frac{V_0 \sin \alpha}{g} + \frac{T}{2}.$$

Момент встречи тел может быть также найден из условия, что суммарное время полета тел до встречи должно быть равно времени полета одного тела по всей траектории, т.е.

$$t_0 + (t_0 - T) = \frac{2V_0 \sin \alpha}{g}.$$

Подставляя t_0 в формулу для y_1 , находим высоту, на которой произошла встреча,

$$y_1(t_0) = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} - \frac{gT^2}{8}.$$

Разбалловка. Записаны формулы для координат первого тела – 5 баллов.

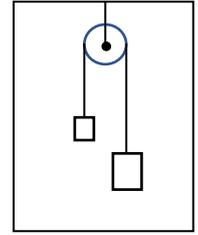
Записана формула для одной из координат второго тела – 5 баллов.

Записано условие встречи тел – 10 баллов.

Найдено время встречи – 5 баллов.

Найдена высота встречи – 5 баллов.

2. (30 баллов) Два тела со вдвое отличающимися массами связаны нитью, которая переброшена через блок, прикрепленный к потолку кабины лифта (см. рис.). С каким ускорением нужно двигать лифт, чтобы ускорение тела меньшей массы было равно нулю относительно земли? Ускорение свободного падения равно g .



Ответ. С ускорением $g/4$.

Решение. Поскольку ускорение тела меньшей массы (обозначим ее через m) равно нулю, то равна нулю и сумма действующих на это тело сил. Следовательно, сила натяжения нити равна силе тяжести mg , действующей на тело меньшей массы. Тогда результирующая сил, действующих на тело большей ($2m$) массы, равна $2mg - mg = mg$ и направлена вниз. Из второго закона Ньютона находим, что ускорение тела большей массы равно $g/2$ и направлено вниз. Ускорение блока (а значит, и лифта) вдвое меньше ускорения тела большей массы и, следовательно, равно $g/4$.

Разбалловка. Понято, чему равна сила натяжения нити – 10 баллов.
Найдено ускорение тела большей массы – 10 баллов.
Найдено ускорение блока – 10 баллов.

3. (40 баллов) 10 резисторов с сопротивлениями $R, 2R, \dots, 10R$ соединили последовательно в десятиугольник, к двум вершинам которого подключили источник напряжения. Какими должны быть сопротивления двух участков десятиугольника, расположенных между этими вершинами, чтобы выделяемая в цепи мощность была минимальной?

Ответ. Сопротивления должны быть равны $27R$ и $28R$.

Решение. Выделяемая в цепи мощность P равна

$$P = \frac{U^2}{R_1} + \frac{U^2}{R_2},$$

где U – напряжение источника, а R_1 и R_2 – сопротивления участков десятиугольника между вершинами, к которым подключен источник. Учитывая, что $R_1 + R_2 = R_{\text{полн}}$, где $R_{\text{полн}} = 55R$ – полное сопротивление цепи, мощность можно представить в виде

$$P = \frac{U^2}{R_1} + \frac{U^2}{R_{\text{полн}} - R_1} = U^2 \frac{R_{\text{полн}}}{R_1(R_{\text{полн}} - R_1)}.$$

Минимальная мощность достигается тогда, когда знаменатель максимален. Зависимость знаменателя от сопротивления R_1 является параболической функцией, максимум которой достигается при $R_1 = R_{\text{полн}}/2$. Поскольку разделить сопротивления пополам между ветвями невозможно (число 55 нечетно), максимум будет достигаться при наиболее близких к $R_{\text{полн}}/2$ сопротивлениях ветвей, т.е. при $R_1 = 27R$ и $R_2 = 28R$.

Разбалловка. Записана формула для мощности в общем виде – 5 баллов.

Мощность представлена как функция одной переменной – 10 баллов.

Найдено, что сопротивления ветвей должны быть как можно ближе к $R_{\text{полн}}/2$ – 15 баллов.

Найдено сопротивление одного участка – 5 баллов.

Найдено сопротивление другого участка – 5 баллов.

ОЛИМПИАДА “БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ – БУДУЩЕЕ НАУКИ” 2023-2024

Физика, I тур, вариант 2

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ И РАЗБАЛЛОВКИ

10 класс

1. (30 баллов) Одно тело бросили с поверхности земли под углом α к горизонту с начальной скоростью V_0 , а другое – из конечной точки траектории первого с запаздыванием на время T так, что оно полетело по той же траектории в обратном направлении. Найти относительную скорость тел в момент их встречи. Ускорение свободного падения равно g .

Ответ. Относительная скорость тел равна $2\sqrt{V_0^2 \cos^2 \alpha + \left(\frac{gT}{2}\right)^2}$.

Решение. Запишем горизонтальную (x) и вертикальную (y) координаты брошенного первым тела в зависимости от времени t , отсчитываемого от момента броска этого тела, как

$$x_1 = V_0 \cos \alpha t, \quad y_1 = V_0 \sin \alpha t - gt^2/2.$$

Чтобы брошенное вторым тело полетело по той же траектории, что и первое, его начальная скорость и угол броска должны быть теми же. Тогда координаты второго тела могут быть записаны как

$$x_2 = L - V_0 \cos \alpha (t - T), \quad y_2 = V_0 \sin \alpha (t - T) - g(t - T)^2/2,$$

где $L = V_0^2 \sin 2\alpha/g$ – дальность полета тел. Записывая условие встречи тел как $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$, находим момент встречи тел

$$t_0 = \frac{V_0 \sin \alpha}{g} + \frac{T}{2}.$$

Момент встречи тел может быть также найден из условия, что суммарное время полета тел до встречи должно быть равно времени полета одного тела по всей траектории, т.е.

$$t_0 + (t_0 - T) = \frac{2V_0 \sin \alpha}{g}.$$

Подставляя t_0 в формулу для y_1 , находим высоту, на которой произошла встреча,

$$y_1(t_0) = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} - \frac{gT^2}{8}.$$

Запишем закон сохранения энергии для первого тела как

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{mV^2}{2} + mgy_1(t_0),$$

где m – масса тела, V – скорость тела на высоте встречи. Подставляя в это уравнение выражение для $y_1(t_0)$, находим скорость тела в точке встречи

$$V = \sqrt{V_0^2 \cos^2 \alpha + \left(\frac{gT}{2}\right)^2}.$$

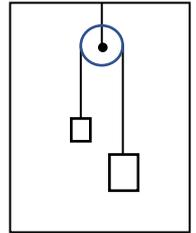
Поскольку в момент встречи скорости тел равны по величине и противоположны по направлению, их относительная скорость в этот момент $V_{\text{отн}}$ равна

$$V_{\text{отн}} = 2V = 2 \sqrt{V_0^2 \cos^2 \alpha + \left(\frac{gT}{2}\right)^2}.$$

После нахождения момента встречи относительную скорость тел можно найти и по-другому. Действительно, горизонтальная скорость первого тела равна $V_0 \cos \alpha$, а его вертикальная скорость в момент встречи можно найти как $|V_0 \sin \alpha - gt_0| = \frac{gT}{2}$. В итоге приходим к найденной выше скорости V , а затем и к $V_{\text{отн}}$.

- Разбалловка.** Записаны формулы для координат первого тела – 5 баллов.
 Записана формула для одной из координат второго тела – 5 баллов.
 Записано условие встречи тел – 5 баллов.
 Найдено время встречи – 5 баллов.
 Найдена относительная скорость – 10 баллов.

2. (30 баллов) Два тела со вдвое отличающимися массами связаны нитью, которая переброшена через блок, прикрепленный к потолку кабины лифта (см. рис.). С каким ускорением нужно двигать лифт, чтобы ускорение тела большей массы было равно нулю относительно земли? Ускорение свободного падения равно g .



Ответ. С ускорением $g/2$.

Решение. Поскольку ускорение тела большей массы (обозначим ее через $2m$) равно нулю, то равна нулю и сумма действующих на это тело сил. Следовательно, сила натяжения нити равна силе тяжести $2mg$, действующей на тело большей массы. Тогда результирующая сил, действующих на тело меньшей (m) массы, равна $2mg - mg = mg$ и направлена вверх. Из второго закона Ньютона находим, что ускорение тела меньшей массы равно g и направлено вверх. Ускорение блока (а значит, и лифта) вдвое меньше ускорения тела меньшей массы и, следовательно, равно $g/2$.

- Разбалловка.** Понято, чему равна сила натяжения нити – 10 баллов.
 Найдено ускорение тела меньшей массы – 10 баллов.
 Найдено ускорение блока – 10 баллов.

3. (40 баллов) 10 резисторов с сопротивлениями $R, 2R, \dots, 10R$ соединили последовательно в десятиугольник, к двум вершинам которого подключили источник напряжения. Какими должны быть сопротивления двух участков десятиугольника, расположенных между этими вершинами, чтобы выделяемая в цепи мощность была минимальной?

Ответ. Сопротивления должны быть равны $27R$ и $28R$.

Решение. Выделяемая в цепи мощность P равна

$$P = \frac{U^2}{R_1} + \frac{U^2}{R_2},$$

где U – напряжение источника, а R_1 и R_2 – сопротивления участков десятиугольника между вершинами, к которым подключен источник. Учитывая, что $R_1 + R_2 = R_{\text{полн}}$, где $R_{\text{полн}} = 55R$ – полное сопротивление цепи, мощность можно представить в виде

$$P = \frac{U^2}{R_1} + \frac{U^2}{R_{\text{полн}} - R_1} = U^2 \frac{R_{\text{полн}}}{R_1(R_{\text{полн}} - R_1)}.$$

Минимальная мощность достигается тогда, когда знаменатель максимален. Зависимость знаменателя от сопротивления R_1 является параболической функцией, максимум которой достигается при $R_1 = R_{\text{полн}}/2$. Поскольку разделить сопротивления пополам между ветвями невозможно (число 55 нечетно), максимум будет достигаться при наиболее близких к $R_{\text{полн}}/2$ сопротивлениям ветвей, т.е. при $R_1 = 27R$ и $R_2 = 28R$.

- Разбалловка.** Записана формула для мощности в общем виде – 5 баллов.
 Мощность представлена как функция одной переменной – 10 баллов.
 Найдено, что сопротивления ветвей должны быть как можно ближе к $R_{\text{полн}}/2$ – 15 баллов.
 Найдено сопротивление одного участка – 5 баллов.
 Найдено сопротивление другого участка – 5 баллов.