ОЛИМПИАДА “БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ – БУДУЩЕЕ НАУКИ” 2023-2024

Физика, I тур, вариант 1

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ И РАЗБАЛЛОВКИ

11 класс

1. (30 баллов) Одно тело бросили с поверхности земли под углом α к горизонту с начальной скоростью V_0, а другое – из конечной точки траектории первого с запаздыванием на время T так, что оно полетело по той же траектории в обратном направлении. На какой высоте произойдет встреча тел? Ускорение свободного падения равно g.

Ответ. На высоте $\frac{V_0^2\sin^2\alpha}{2g}-\frac{gT^2}{8}$.

Решение. Запишем горизонтальную (x) и вертикальную (y) координаты брошенного первым тела в зависимости от времени t, отсчитываемого от момента броска этого тела, как

$$x_1=V_0\cos\alpha\, t,\quad y_1=V_0\sin\alpha\, t-gt^2/2.$$

Чтобы брошенное вторым тело полетело по той же траектории, что и первое, его начальная скорость и угол броска должны быть теми же. Тогда координаты второго тела могут быть записаны как

$$x_2=L-V_0\cos\alpha\,(t-T),\quad y_2=V_0\sin\alpha\,(t-T)-g(t-T)^2/2,$$

где $L=V_0^2\sin 2\alpha/g$ – дальность полета тел. Записывая условие встречи тел как $x_1=x_2$ или $y_1=y_2$, находим момент встречи тел

$$t_0=\frac{V_0\sin\alpha}{g}+\frac{T}{2}.$$

Момент встречи тел может быть также найден из условия, что суммарное время полета тел до встречи должно быть равно времени полета одного тела по всей траектории, т.е.

$$t_0+(t_0-T)=\frac{2V_0\sin\alpha}{g}.$$

Подставляя t_0 в формулу для y_1, находим высоту, на которой произошла встреча,

$$y_1(t_0)=\frac{V_0^2\sin^2\alpha}{2g}-\frac{gT^2}{8}.$$

Разбалловка. Записаны формулы для координат первого тела – 5 баллов.
Записана формула для одной из координат второго тела – 5 баллов.
Записано условие встречи тел – 10 баллов.
Найдено время встречи – 5 баллов.
Найдена высота встречи – 5 баллов.

2. (40 баллов) Положительный точечный заряд q внесли в однородное поле напряженности $\mathbf{E}_0$. Найти разность потенциалов между точкой, в которой полное электрическое поле равно нулю, и точкой, в которой полное поле противоположно по направлению полю $\mathbf{E}_0$ и равно ему по величине.

Ответ. Разность потенциалов равна $\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}-1\right)\sqrt{\frac{qE_0}{\pi\varepsilon_0}}$, где ε_0 – электрическая постоянная.

Решение. Точки, где полное поле равно нулю и $-\mathbf{E}_0$, находятся на силовой линии поля $\mathbf{E}_0$, проходящей через заряд q. Расстояние r_1 от заряда q до точки, где поле равно нулю, находим из условия

$$E_0=\frac{kq}{r_1^2},$$

где $k=1/(4\pi\varepsilon_0)$ и ε_0 – электрическая постоянная. Получаем

$$r_1=\sqrt{\frac{kq}{E_0}}.$$

Расстояние r_2 от заряда q до точки, где полное поле равно $-\mathbf{E}_0$, находим из условия

$$2E_0 = \frac{kq}{r_2^2}.$$

Получаем

$$r_2 = \sqrt{\frac{kq}{2E_0}}.$$

Согласно принципу суперпозиции разность потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1$ между точками можно записать как сумму вкладов от точечного заряда $\frac{kq}{r_2} - \frac{kq}{r_1}$ и внешнего поля $-E_0(r_1 - r_2)$, т.е.,

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{kq}{r_2} - \frac{kq}{r_1} - E_0(r_1 - r_2).$$

Подставляя в данную формулу найденные расстояния, окончательно получаем

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\sqrt{kqE_0} = \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} - 1\right)\sqrt{\frac{qE_0}{\pi\varepsilon_0}}.$$

Разбалловка. Понято расположение точек относительно точечного заряда – 5 баллов.
Найдено расстояние от заряда до одной точки – 5 баллов.
Найдено расстояние от заряда до другой точки – 5 баллов.
Найден вклад в разность потенциалов от заряда – 10 баллов.
Найден вклад от однородного поля – 10 баллов.
Получен ответ – 5 баллов.

3. (30 баллов) К вбитому в стену гвоздю привязали на нитях длиной L два груза так, чтобы получившиеся маятники могли совершать колебания в близко расположенных и параллельных стене плоскостях, не задевая друг друга. Для возбуждения колебаний маятники отклонили на небольшой угол θ_0 от вертикали в противоположных направлениях, затем отпустили один из них, а когда тот достиг вертикального положения, отпустили и второй. Каким будет максимальное расстояние между грузами в ходе дальнейших колебаний?

Ответ. Максимальное расстояние равно $\sqrt{2}L\theta_0$.

Решение. В силу малости углов отклонения маятников можно пренебречь смещением грузов по вертикали и считать, что они движутся вдоль горизонтальной оси x (направим ее в сторону отклонения маятника, начавшего движение первым). Зависимости от времени координат грузов можно записать в виде

$$x_1 = L\theta_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -L\theta_0 \sin\omega t, \qquad x_2 = -L\theta_0\cos\omega t,$$

где использовано примерное равенство $\sin\theta_0 \approx \theta_0$, через ω обозначена угловая частота колебаний и начальная фаза маятника, начавшего движение первым, подобрана такой, чтобы в момент $t = 0$ угол его отклонения равнялся нулю (в этот момент другой маятник только начинает движение от положения максимального отклонения). Максимальное расстояние между грузами может быть найдено исследованием функции $x_2 - x_1 = -L\theta_0\left[\cos\omega t + \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right]$. Используя формулу для суммы косинусов, получаем

$$x_2 - x_1 = -2L\theta_0\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right),$$

откуда следует, что максимальное значение функции равно $\sqrt{2}L\theta_0$ и в первый раз достигается при $\omega t = \frac{3\pi}{4}$.

Максимальное расстояние между грузами можно также найти, поняв, что в момент $\omega t = \frac{3\pi}{4}$ маятники имеют одинаковые скорости. Это означает, что скорость удаления маятников друг от друга обращается в нуль и, следовательно, расстояние между ними достигает максимума.

Разбалловка. Записаны зависимости от времени углов или координат маятников – по 5 баллов за маятник.
Записана функция зависимости расстояния между грузами от времени – 5 баллов.
Функция преобразована к удобному для анализа виду – 5 баллов.
Найдено максимальное расстояние – 10 баллов.

ОЛИМПИАДА “БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ – БУДУЩЕЕ НАУКИ” 2023-2024

Физика, I тур, вариант 2

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ И РАЗБАЛЛОВКИ

11 класс

1. (30 баллов) Одно тело бросили с поверхности земли под углом α к горизонту с начальной скоростью V_0, а другое – из конечной точки траектории первого с запаздыванием на время T так, что оно полетело по той же траектории в обратном направлении. Найти относительную скорость тел в момент их встречи. Ускорение свободного падения равно g.

Ответ. Относительная скорость тел равна $2\sqrt{V_0^2\cos^2\alpha+\left(\frac{gT}{2}\right)^2}$.

Решение. Запишем горизонтальную (x) и вертикальную (y) координаты брошенного первым тела в зависимости от времени t, отсчитываемого от момента броска этого тела, как

$$x_1=V_0\cos\alpha\, t,\quad y_1=V_0\sin\alpha\, t-gt^2/2.$$

Чтобы брошенное вторым тело полетело по той же траектории, что и первое, его начальная скорость и угол броска должны быть теми же. Тогда координаты второго тела могут быть записаны как

$$x_2=L-V_0\cos\alpha\,(t-T),\quad y_2=V_0\sin\alpha\,(t-T)-g(t-T)^2/2,$$

где $L=V_0^2\sin 2\alpha/g$ – дальность полета тел. Записывая условие встречи тел как $x_1=x_2$ или $y_1=y_2$, находим момент встречи тел

$$t_0=\frac{V_0\sin\alpha}{g}+\frac{T}{2}.$$

Момент встречи тел может быть также найден из условия, что суммарное время полета тел до встречи должно быть равно времени полета одного тела по всей траектории, т.е.

$$t_0+(t_0-T)=\frac{2V_0\sin\alpha}{g}.$$

Подставляя t_0 в формулу для y_1, находим высоту, на которой произошла встреча,

$$y_1(t_0)=\frac{V_0^2\sin^2\alpha}{2g}-\frac{gT^2}{8}.$$

Запишем закон сохранения энергии для первого тела как

$$\frac{mV_0^2}{2}=\frac{mV^2}{2}+mgy_1(t_0),$$

где m – масса тела, V – скорость тела на высоте встречи. Подставляя в это уравнение выражение для $y_1(t_0)$, находим скорость тела в точке встречи

$$V=\sqrt{V_0^2\cos^2\alpha+\left(\frac{gT}{2}\right)^2}.$$

Поскольку в момент встречи скорости тел равны по величине и противоположны по направлению, их относительная скорость в этот момент $V_{\text{отн}}$ равна

$$V_{\text{отн}}=2V=2\sqrt{V_0^2\cos^2\alpha+\left(\frac{gT}{2}\right)^2}.$$

После нахождения момента встречи относительную скорость тел можно найти и по-другому. Действительно, горизонтальная скорость первого тела равна $V_0\cos\alpha$, а его вертикальная скорость в момент встречи можно найти как $|V_0\sin\alpha-gt_0|=\frac{gT}{2}$. В итоге приходим к найденной выше скорости V, а затем и к $V_{\text{отн}}$.

Разбалловка. Записаны формулы для координат первого тела – 5 баллов.
Записана формула для одной из координат второго тела – 5 баллов.
Записано условие встречи тел – 5 баллов.
Найдено время встречи – 5 баллов.
Найдена относительная скорость – 10 баллов.

2. (40 баллов) Отрицательный точечный заряд $-q$ внесли в однородное поле напряженности $\mathbf{E}_0$. Найти разность потенциалов между точкой, в которой полное электрическое поле равно нулю, и точкой, в которой полное поле противоположно по направлению полю $\mathbf{E}_0$ и равно ему по величине.

Ответ. Разность потенциалов равна $\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}-1\right)\sqrt{\frac{qE_0}{\pi\varepsilon_0}}$, где ε_0 – электрическая постоянная.

Решение. Точки, где полное поле равно нулю и $-\mathbf{E}_0$, находятся на силовой линии поля $\mathbf{E}_0$, проходящей через заряд $-q$. Расстояние r_1 от заряда $-q$ до точки, где поле равно нулю, находим из условия

$$E_0 = \frac{kq}{r_1^2},$$

где $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$ и ε_0 – электрическая постоянная. Получаем

$$r_1 = \sqrt{\frac{kq}{E_0}}.$$

Расстояние r_2 от заряда $-q$ до точки, где полное поле равно $-\mathbf{E}_0$, находим из условия

$$2E_0 = \frac{kq}{r_2^2}.$$

Получаем

$$r_2 = \sqrt{\frac{kq}{2E_0}}.$$

Согласно принципу суперпозиции разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ между точками можно записать как сумму вкладов от точечного заряда $-\frac{kq}{r_1}+\frac{kq}{r_2}$ и внешнего поля $-E_0(r_1 - r_2)$, т.е.,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{kq}{r_1}+\frac{kq}{r_2} - E_0(r_1 - r_2).$$

Подставляя в данную формулу найденные расстояния, окончательно получаем

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\sqrt{kqE_0} = \left(\frac{3}{2\sqrt{2}}-1\right)\sqrt{\frac{qE_0}{\pi\varepsilon_0}}.$$

Разбалловка. Понято расположение точек относительно точечного заряда – 5 баллов.
Найдено расстояние от заряда до одной точки – 5 баллов.
Найдено расстояние от заряда до другой точки – 5 баллов.
Найден вклад в разность потенциалов от заряда – 10 баллов.
Найден вклад от однородного поля – 10 баллов.
Получен ответ – 5 баллов.

3. (30 баллов) К вбитому в стену гвоздю привязали на нитях длиной L два груза так, чтобы получившиеся маятники могли совершать колебания в близко расположенных и параллельных стене плоскостях, не задевая друг друга. Для возбуждения колебаний маятники отклонили от вертикали на небольшой одинаковый угол в противоположных направлениях, затем отпустили один из них, а когда тот достиг вертикального положения, отпустили и второй. Через какое время после начала движения второго маятника расстояние между маятниками достигнет максимального значения? Ускорение свободного падения равно g.

Ответ. Через время $\frac{3\pi}{4}\sqrt{\frac{L}{g}}$.

Решение. В силу малости углов отклонения маятников можно пренебречь смещением грузов по вертикали и считать, что они движутся вдоль горизонтальной оси x (направим ее в сторону отклонения маятника, начавшего движение первым). Зависимости от времени координат грузов можно записать в виде

$$x_1 = A\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -L\theta_0 \sin\omega t\,, \qquad x_2 = -A\cos\omega t,$$

где использовано примерное равенство $\sin\theta_0 \approx \theta_0$, через ω обозначена угловая частота колебаний и начальная фаза маятника, начавшего движение первым, подобрана такой, чтобы в момент $t = 0$ угол его отклонения равнялся нулю (в этот момент другой маятник только начинает движение от положения максимального отклонения A). Максимальное расстояние между грузами может быть найдено исследованием функции $x_2 - x_1 = -A\left[\cos\omega t + \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right]$. Используя формулу для суммы косинусов, получаем

$$x_2 - x_1 = -2A\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right),$$

откуда следует, что максимальное значение функции в первый раз достигается при $\omega t = \frac{3\pi}{4}$. Учитывая, что для математического маятника $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$, находим искомое время

$$t = \frac{3\pi}{4\omega} = \frac{3\pi}{4}\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Можно также исходить из того, что в момент $\omega t = \frac{3\pi}{4}$ маятники имеют одинаковые скорости. Это означает, что скорость удаления маятников друг от друга обращается в нуль и, следовательно, расстояние между ними достигает максимума.

Разбалловка. Записаны зависимости от времени углов или координат маятников – по 5 баллов за маятник.
Записана функция зависимости расстояния между грузами от времени – 5 баллов.
Функция преобразована к удобному для анализа виду – 5 баллов.
Найден искомый момент времени – 10 баллов.