ОЛИМПИАДА "БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ – БУДУЩЕЕ НАУКИ" 2023-2024

Физика, I тур, вариант 1

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ И РАЗБАЛЛОВКИ

9 класс

1. (40 баллов) Две частицы совершают движение вдоль одной прямой, выходя с интервалом T из одной точки в одном направлении с одной и той же начальной скоростью V_0. Вышедшая ранее частица движется с постоянным ускорением, а вышедшая позже – равномерно со скоростью V_0. Частицы встречаются через время $(3/2)T$ с момента начала движения первой частицы. Найти путь, пройденный до встречи первой частицей.

Ответ. Первая частица прошла путь $5V_0T/8$.

Решение. Возьмем ось x в направлении начальных скоростей частиц и запишем координаты частиц в зависимости от времени (отсчитываемого от момента начала движения первой частицы) в виде

$$x_1 = V_0 t - \frac{at^2}{2}, \qquad x_2 = V_0(t - T)$$

(a – ускорение первой частицы). Здесь учтено, что вектор ускорения первой частицы направлен против вектора начальной скорости, иначе частицы не могли бы встретиться. Из условия $x_1(3T/2) = x_2(3T/2)$ находим ускорение

$$a = \frac{8V_0}{9T}.$$

Зная ускорение, можно найти время остановки первой частицы

$$t_{\text{ост}} = \frac{V_0}{a} = \frac{9}{8}T,$$

а затем и время движения от остановки до встречи $3T/2 - t_{\text{ост}} = 3T/8$.

Путь, пройденный к моменту встречи первой частицей, складывается из пути до остановки $V_0^2/(2a)$ и пути после остановки $a(3T/8)^2/2$, т.е.

$$S_1 = \frac{V_0^2}{2a} + \frac{9aT^2}{128} = \frac{9V_0T}{16} + \frac{V_0T}{16} = \frac{5V_0T}{8}.$$

Разбалловка: Записаны зависимости координат частиц от времени – по 5 баллов за частицу.
Найдено ускорение первой частицы – 5 баллов.
Найдено время движения первой частицы до остановки – 5 баллов.
Найдено время движения первой частицы после остановки – 5 баллов.
Найден путь первой частицы до остановки – 5 баллов.
Найден путь первой частицы после остановки – 5 баллов.
Получен ответ – 5 баллов.

2. (30 баллов) 10 резисторов с сопротивлениями R, $2R$, … $10R$ соединили последовательно в десятиугольник, к двум вершинам которого подключили источник напряжения. Какими должны быть сопротивления двух участков десятиугольника, расположенных между этими вершинами, чтобы выделяемая в цепи мощность была минимальной?

Ответ. Сопротивления должны быть равны $27R$ и $28R$.

Решение. Выделяемая в цепи мощность P равна

$$P = \frac{U^2}{R_1} + \frac{U^2}{R_2},$$

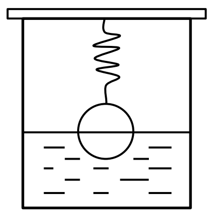
где U – напряжение источника, а R_1 и R_2 – сопротивления участков десятиугольника между вершинами, к которым подключен источник. Учитывая, что $R_1 + R_2 = R_{\text{полн}}$, где $R_{\text{полн}} = 55R$ – полное сопротивление цепи, мощность можно представить в виде

$$P = \frac{U^2}{R_1} + \frac{U^2}{R_{\text{полн}} - R_1} = U^2 \frac{R_{\text{полн}}}{R_1(R_{\text{полн}} - R_1)}.$$

Минимальная мощность достигается тогда, когда знаменатель максимален. Зависимость знаменателя от сопротивления R_1 является параболической функцией, максимум которой достигается при $R_1 = R_{\text{полн}}/2$. Поскольку разделить сопротивления пополам между ветвями невозможно (число 55 нечетно), максимум будет достигаться при наиболее близких к $R_{\text{полн}}/2$ сопротивлениях ветвей, т.е. при $R_1 = 27R$ и $R_2 = 28R$.

Разбалловка. Записана формула для мощности в общем виде – 5 баллов.
Мощность представлена как функция одной переменной – 5 баллов.
Найдено, что сопротивления ветвей должны быть как можно ближе к $R_{\text{полн}}/2$ – 10 баллов.
Найдено сопротивление одного участка – 5 баллов.
Найдено сопротивление другого участка – 5 баллов.

3. (30 баллов) В цилиндрическом сосуде находится шар объемом V_0, наполовину погруженный в воду и скрепленный пружиной жесткости k с перемычкой в верхней части сосуда (см. рис.). После того, как в сосуд долили воду объемом V_1, шар оказался погруженным полностью, а пружина недеформированной. Найти площадь дна сосуда. Плотность воды равна ρ, ускорение свободного падения равно g.



Ответ. Площадь дна равна $\frac{k(V_0+2V_1)}{\rho V_0 g+2k\sqrt[3]{3V_0/(4\pi)}}$.

Решение. Из конечного состояния системы (шар плавает полностью погруженным, пружина на него не действует) ясно, что плотность шара равна плотности воды. Тогда можно написать следующее условие баланса действующих на шар сил (тяжести, Архимеда и упругой) в начальном состоянии:

$$\rho V_0 g = \rho \frac{V_0}{2} g + k\Delta L,$$

где ΔL – начальное растяжение пружины. Отсюда получаем, что

$$\Delta L = \frac{\rho V_0 g}{2k}.$$

Поскольку в конечном состоянии пружина не деформирована, ясно, что шар поднялся на ΔL. При этом уровень воды в сосуде поднялся на $\Delta L + R$, где $R = \sqrt[3]{3V_0/(4\pi)}$ – радиус шара. Следовательно, вода заполнила дополнительный объем $S(\Delta L + R) - V_0/2$. Записывая равенство

$$S(\Delta L + R) - \frac{V_0}{2} = V_1$$

и подставляя в него найденное выражение для ΔL, окончательно получаем

$$S = \frac{k(V_0 + 2V_1)}{\rho V_0 g + 2kR} = \frac{k(V_0 + 2V_1)}{\rho V_0 g + 2k\sqrt[3]{3V_0/(4\pi)}}.$$

Разбалловка. Понято, что плотность шара равна плотности воды – 5 баллов.
Найдено начальное растяжение пружины – 10 баллов.
Составлено уравнение для нахождения площади дна – 10 баллов.
Найдена площадь дна – 5 баллов.

ОЛИМПИАДА “БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ – БУДУЩЕЕ НАУКИ” 2023-2024

Физика, I тур, вариант 2

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ И РАЗБАЛЛОВКИ

9 класс

1. (40 баллов) Две частицы совершают движение вдоль одной прямой, выходя с интервалом T из одной точки в одном направлении с одной и той же начальной скоростью V_0. Вышедшая ранее частица движется с постоянным ускорением, а вышедшая позже – равномерно со скоростью V_0. Частицы встречаются через время $(4/3)T$ с момента начала движения первой частицы. Найти путь, пройденный до встречи первой частицей.

Ответ. Первая частица прошла путь $5V_0T/9$.

Решение. Возьмем ось x в направлении начальных скоростей частиц и запишем координаты частиц в зависимости от времени (отсчитываемого от момента начала движения первой частицы) в виде

$$x_1 = V_0 t - \frac{at^2}{2}, \qquad x_2 = V_0(t - T)$$

(a – ускорение первой частицы). Здесь учтено, что вектор ускорения первой частицы направлен против вектора начальной скорости, иначе частицы не могли бы встретиться. Из условия $x_1(4T/3) = x_2(4T/3)$ находим ускорение

$$a = \frac{9V_0}{8T}.$$

Зная ускорение, можно найти время остановки первой частицы

$$t_{\text{ост}} = \frac{V_0}{a} = \frac{8}{9}T,$$

а затем и время движения от остановки до встречи $4T/3 - t_{\text{ост}} = 4T/9$.

Путь, пройденный к моменту встречи первой частицей, складывается из пути до остановки $V_0^2/(2a)$ и пути после остановки $a(4T/9)^2/2$, т.е.

$$S_1 = \frac{V_0^2}{2a} + \frac{8aT^2}{81} = \frac{4V_0T}{9} + \frac{V_0T}{9} = \frac{5V_0T}{9}.$$

Разбалловка: Записаны зависимости координат частиц от времени – по 5 баллов за частицу.
Найдено ускорение первой частицы – 5 баллов.
Найдено время движения первой частицы до остановки – 5 баллов.
Найдено время движения первой частицы после остановки – 5 баллов.
Найден путь первой частицы до остановки – 5 баллов.
Найден путь первой частицы после остановки – 5 баллов.
Получен ответ – 5 баллов.

2. (30 баллов) 10 резисторов с сопротивлениями R, $2R$, … $10R$ соединили последовательно в десятиугольник, к двум вершинам которого подключили источник напряжения. Какими должны быть сопротивления двух участков десятиугольника, расположенных между этими вершинами, чтобы выделяемая в цепи мощность была минимальной?

Ответ. Сопротивления должны быть равны $27R$ и $28R$.

Решение. Выделяемая в цепи мощность P равна

$$P = \frac{U^2}{R_1} + \frac{U^2}{R_2},$$

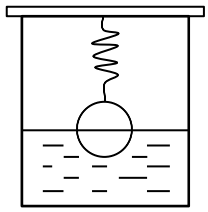
где U – напряжение источника, а R_1 и R_2 – сопротивления участков десятиугольника между вершинами, к которым подключен источник. Учитывая, что $R_1 + R_2 = R_{\text{полн}}$, где $R_{\text{полн}} = 55R$ – полное сопротивление цепи, мощность можно представить в виде

$$P = \frac{U^2}{R_1} + \frac{U^2}{R_{\text{полн}} - R_1} = U^2 \frac{R_{\text{полн}}}{R_1(R_{\text{полн}} - R_1)}.$$

Минимальная мощность достигается тогда, когда знаменатель максимален. Зависимость знаменателя от сопротивления R_1 является параболической функцией, максимум которой достигается при $R_1 = R_{\text{полн}}/2$. Поскольку разделить сопротивления пополам между ветвями невозможно (число 55 нечетно), максимум будет достигаться при наиболее близких к $R_{\text{полн}}/2$ сопротивлениях ветвей, т.е. при $R_1 = 27R$ и $R_2 = 28R$.

Разбалловка. Записана формула для мощности в общем виде – 5 баллов.
Мощность представлена как функция одной переменной – 5 баллов.
Найдено, что сопротивления ветвей должны быть как можно ближе к $R_{\text{полн}}/2$ – 10 баллов.
Найдено сопротивление одного участка – 5 баллов.
Найдено сопротивление другого участка – 5 баллов.

3. (30 баллов) В цилиндрическом сосуде находится шар объемом V_0, наполовину погруженный в воду и скрепленный пружиной с перемычкой в верхней части сосуда (см. рис.). Площадь дна сосуда равна S. После того, как в сосуд долили воду объемом V_1, шар оказался погруженным полностью, а пружина недеформированной. Найти жесткость пружины. Плотность воды равна ρ, ускорение свободного падения равно g.



Ответ. Жесткость пружины равна $\frac{\rho g S V_0}{V_0 + 2V_1 - 2S\sqrt[3]{3V_0/(4\pi)}}$.

Решение. Из конечного состояния системы (шар плавает полностью погруженным, пружина на него не действует) ясно, что плотность шара равна плотности воды. Тогда можно написать следующее условие баланса действующих на шар сил (тяжести, Архимеда и упругой) в начальном состоянии:

$$\rho V_0 g = \rho \frac{V_0}{2} g + k\Delta L,$$

где k – жесткость пружины, а ΔL – начальное растяжение пружины. Отсюда получаем, что

$$\Delta L = \frac{\rho V_0 g}{2k}.$$

Поскольку в конечном состоянии пружина не деформирована, ясно, что шар поднялся на ΔL. При этом уровень воды в сосуде поднялся на $\Delta L + R$, где $R = \sqrt[3]{3V_0/(4\pi)}$ – радиус шара. Следовательно, вода заполнила дополнительный объем $S(\Delta L + R) - V_0/2$. Записывая равенство

$$S(\Delta L + R) - \frac{V_0}{2} = V_1$$

и подставляя в него найденное выражение для ΔL, окончательно получаем

$$k = \frac{\rho g S V_0}{V_0 + 2V_1 - 2SR} = \frac{\rho g S V_0}{V_0 + 2V_1 - 2S\sqrt[3]{3V_0/(4\pi)}}.$$

Разбалловка. Понято, что плотность шара равна плотности воды – 5 баллов.
Найдено начальное растяжение пружины – 10 баллов.
Составлено уравнение для нахождения жесткости пружины – 10 баллов.
Найдена жесткость – 5 баллов.