

ОЛИМПИАДА “БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ – БУДУЩЕЕ НАУКИ” 2024-2025
Физика, II тур

10 класс

1. (25 баллов) Тело бросили со скоростью V_0 под углом 45° к горизонту. Найти радиус окружности, на которой лежат точки броска и падения и высшая точка траектории. Ускорение свободного падения равно g .

Ответ. Радиус окружности равен $5V_0^2/(8g)$.

Решение. Как видно из рисунка, искомый радиус R , дальность полета тела L и максимальная высота H связаны соотношением (справедливым как при $H > R$, так и $H < R$)

$$(H - R)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 = R^2,$$

откуда находим, что

$$R = \frac{H}{2} + \frac{L^2}{8H}.$$

Принимая во внимание формулы

$$L = \frac{2V_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}, \quad H = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g},$$

где угол броска $\alpha = 45^\circ$, окончательно получаем

$$R = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{4g} + \frac{V_0^2 \cos^2 \alpha}{g} = \frac{5V_0^2}{8g}.$$

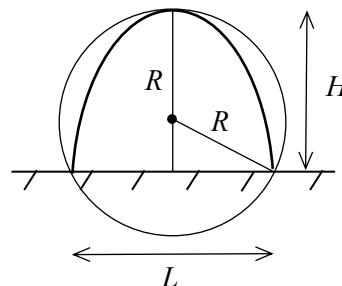
Разбалловка. Записано уравнение связи R , L и H – 5 баллов.

Радиус R выражен через L и H – 5 баллов.

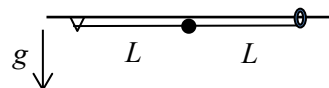
Записана формула для дальности полета – 5 баллов.

Записана формула для максимальной высоты подъема – 5 баллов.

Получен ответ – 5 баллов.



2. (25 баллов) Нить длины $2L$ одним концом закреплена на горизонтальной спице, а другим прикреплена к кольцу, которое может скользить по спице без трения. К середине нити прикреплен груз, масса которого равна массе кольца. Вначале груз удерживают у спицы так, что нить горизонтальна (см. рис.), а затем отпускают. Найти скорость кольца в момент, когда груз пройдет путь, равный L . Найти отношение сил натяжения половин нити в этот момент. Ускорение свободного падения равно g .



Ответ. Скорость кольца равна $V_k = 2 \sin \alpha \sqrt{\frac{2gL \sin \alpha}{1 + 4 \sin^2 \alpha}}$, где $\alpha = 1$ рад. Сила натяжения прикрепленной к спице половины нити в 1,5 раза больше силы натяжения половины нити, прикрепленной к кольцу.

Решение. После освобождения груза он движется по окружности радиуса L с центром в точке закрепления конца нити на спице. После прохождения грузом по окружности пути, равного радиусу окружности L , левая на рисунке половина нити поворачивается на угол $\alpha = 1$ рад. При этом груз опускается на высоту

$$h = L \sin \alpha$$

относительно уровня спицы. Запишем закон сохранения механической энергии в виде

$$\frac{mV_k^2}{2} + \frac{mV_r^2}{2} + \frac{mV_b^2}{2} = mgh,$$

где m – масса кольца (груза), V_k – скорость кольца, а V_r и V_b – горизонтальная и вертикальная компоненты скорости груза.

Поскольку в любой момент времени груз находится посередине между кольцом и неподвижной точкой закрепления конца нити, его координата вдоль спицы x_{Γ} (отсчитываемая от точки закрепления нити) связана с координатой кольца x_{κ} соотношением $x_{\Gamma} = x_{\kappa}/2$. Таким же соотношением связаны, очевидно, и изменения координат за небольшой промежуток времени Δt : $\Delta x_{\Gamma} = \Delta x_{\kappa}/2$ или $\Delta x_{\Gamma}/\Delta t = \Delta x_{\kappa}/(2\Delta t)$. Учитывая, что $\Delta x_{\Gamma}/\Delta t = V_{\Gamma}$ и $\Delta x_{\kappa}/\Delta t = V_{\kappa}$, получаем

$$V_{\Gamma} = \frac{V_{\kappa}}{2}.$$

Учитывая далее, что вектор скорости груза перпендикулярен радиусу окружности, по которой груз движется, выражаем вертикальную скорость груза как

$$V_{\text{в}} = V_{\Gamma} \operatorname{ctg} \alpha = \frac{V_{\kappa}}{2} \operatorname{ctg} \alpha.$$

Подставляя найденные выражения для V_{Γ} и $V_{\text{в}}$ в закон сохранения энергии, находим искомую скорость кольца:

$$V_{\kappa} = 2 \sin \alpha \sqrt{\frac{2gL \sin \alpha}{1 + 4 \sin^2 \alpha}}.$$

Поскольку горизонтальная компонента скорости груза V_{Γ} вдвое меньше скорости кольца V_{κ} в каждый момент времени, то и горизонтальная компонента ускорения груза a_{Γ} вдвое меньше ускорения кольца a_{κ} , т.е.

$$a_{\Gamma} = \frac{a_{\kappa}}{2}.$$

Записывая второй закон Ньютона в проекции на горизонтальное направление для груза и кольца в виде

$$ma_{\Gamma} = N_1 \cos \alpha - N_2 \cos \alpha, \quad ma_{\kappa} = N_2 \cos \alpha,$$

где N_1 – сила натяжения прикрепленной к спице половины нити, а N_2 – прикрепленной к кольцу половины нити, и учитывая связь между ускорениями, находим, что

$$N_1 = \frac{3}{2} N_2.$$

Разбалловка. Записан закон сохранения энергии с $h = L \sin \alpha$ – 5 баллов.

Найдено, что $V_{\Gamma} = 0,5V_{\kappa}$ – 5 баллов.

Найдено, что $V_{\text{в}} = V_{\Gamma} \operatorname{ctg} \alpha$ – 5 баллов.

Найдена искомая скорость кольца – 5 баллов.

Найдено отношение сил натяжения – 5 баллов.

3. (25 баллов) В закрытой с торцов горизонтальной трубе сечением S находится одноатомный газ, разделенный на две части теплонепроницаемым поршнем, который может без трения перемещаться в трубе. Давление газа равно p . На сколько сместится поршень, если к газу подвести количество теплоты Q через левый торец и отвести такое же количество теплоты через правый? Считать, что подвод и отвод тепла ведутся одновременно, с одинаковым темпом.

Ответ. Поршень сместится на расстояние $\frac{2}{5} \frac{Q}{pS}$.

Решение.

Для начального состояния газа введем объемы его частей V_1 и V_2 , количество молей газа в частях ν_1 и ν_2 и температуры частей T_1 и T_2 . Запишем уравнение Клапейрона-Менделеева для частей газа в начальном состоянии в виде

$$pV_1 = \nu_1 RT_1, \quad pV_2 = \nu_2 RT_2.$$

Складывая эти уравнения, получим

$$pV_0 = R(\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2) = \frac{2}{3} U,$$

где V_0 – объем сосуда ($V_0 = V_1 + V_2$) и $U = \frac{3}{2} R(\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2)$ – внутренняя энергия всего газа в начальном состоянии.

Для конечного состояния запишем уравнения Клапейрона-Менделеева в аналогичном виде (снабдив конечные значения величин штрихами)

$$p'V_1' = \nu_1 RT_1', \quad p'V_2' = \nu_2 RT_2'.$$

Складывая уравнения, получаем

$$p'V_0 = R(v_1T_1' + v_2T_2') = \frac{2}{3}U'.$$

Из двух полученных уравнений для всего газа следует, что

$$(p' - p)V_0 = \frac{2}{3}(U' - U).$$

Поскольку внутренняя энергия всего газа не меняется, т.е. $U' - U = 0$, то конечное давление газа (p') равно начальному (p). Ясно также, что энергия газа остается постоянной и на промежуточных этапах процесса (тепло подводится и отводится с одинаковым темпом), следовательно, и давление остается постоянным в ходе всего процесса.

Запишем далее первый принцип термодинамики для (первой) части газа, которой передают тепло, в виде

$$Q = U_1' - U_1 + p(V_1' - V_1).$$

Подставляя в данное уравнение выражения $U_1' - U_1 = \frac{3}{2}v_1R(T_1' - T_1) = \frac{3}{2}p(V_1' - V_1)$ и $(V_1' - V_1) = Sx$, где x – смещение поршня, находим, что

$$x = \frac{2}{5} \frac{Q}{pS}.$$

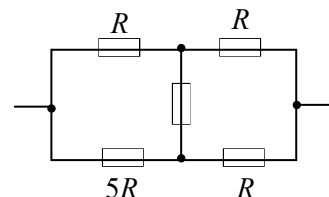
Разбалловка. Доказано, что давление постоянно в ходе процесса – 10 баллов.

Записан первый принцип термодинамики для части газа – 5 баллов.

Изменение внутренней энергии части газа записано через давление и изменение объема – 5 баллов.

Получен ответ – 5 баллов.

4. (25 баллов) В цепи, приведенной на рисунке, даны сопротивления четырех резисторов и известно, что токи через нижние резисторы отличаются вдвое. Найти сопротивление среднего резистора.



Ответ. Сопротивление среднего резистора равно R .

Решение. Будем считать, что полный ток течет через цепь слева-направо. Обозначим искомое сопротивление через R_x , ток в левом нижнем резисторе на рисунке через I_1 , а в левом верхнем – через I_2 . Тогда ток в правом нижнем резисторе равен $2I_1$, а ток через средний резистор, очевидно, течет вниз и равен I_1 . Запишем условие равенства напряжения на левом нижнем резисторе сумме напряжений на левом верхнем и среднем резисторах как

$$I_1 5R = I_2 R + I_1 R_x.$$

Запишем далее равенство напряжения на правом верхнем резисторе сумме напряжений на среднем и правом нижнем резисторах как

$$(I_2 - I_1)R = I_1 R_x + 2I_1 R.$$

Выражая из первого уравнения $I_2 R$ и подставляя полученное выражение во второе уравнение, получаем

$$R_x = R.$$

Разбалловка. Понято, что ток через средний резистор равен 1А – 5 баллов.

Составлено одно уравнение равенства напряжений – 5 баллов.

Составлено второе уравнение равенства напряжений – 5 баллов.

Найдено искомое сопротивление – 10 баллов.