

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ И РАЗБАЛЛОВКИ

11 класс

1. (25 баллов) Тело бросили со скоростью V_0 под углом 45° к горизонту. Найти радиус окружности, на которой лежат точки броска и падения и высшая точка траектории. Ускорение свободного падения равно g .

Ответ. Радиус окружности равен $5V_0^2/(8g)$.

Решение. Как видно из рисунка, искомый радиус R , дальность полета тела L и максимальная высота H связаны соотношением (справедливым как при $H > R$, так и $H < R$)

$$(H - R)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 = R^2,$$

откуда находим, что

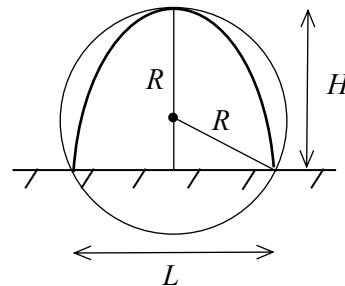
$$R = \frac{H}{2} + \frac{L^2}{8H}.$$

Принимая во внимание формулы

$$L = \frac{2V_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}, \quad H = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g},$$

где угол броска $\alpha = 45^\circ$, окончательно получаем

$$R = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{4g} + \frac{V_0^2 \cos^2 \alpha}{g} = \frac{5V_0^2}{8g}.$$



Разбалловка. Записано уравнение связи R , L и H – 5 баллов.

Радиус R выражен через L и H – 5 баллов.

Записана формула для дальности полета – 5 баллов.

Записана формула для максимальной высоты подъема – 5 баллов.

Получен ответ – 5 баллов.

2. (25 баллов) Нить длины $2L$ одним концом закреплена на горизонтальной спице, а другим прикреплена к кольцу, которое может скользить по спице без трения. К середине нити прикреплен груз, масса которого равна массе кольца. Вначале груз удерживают у спицы так, что нить горизонтальна (см. рис.), а затем отпускают. Найти скорость кольца в момент, когда груз пройдет путь, равный L . Ускорение свободного падения равно g .



Ответ. Скорость кольца равна $V_K = 2 \sin \alpha \sqrt{\frac{2gL \sin \alpha}{1 + 4 \sin^2 \alpha}}$, где $\alpha = 1$ рад.

Решение. После освобождения груза он движется по окружности радиуса L с центром в точке закрепления конца нити на спице. После прохождения грузом по окружности пути, равного радиусу окружности L , левая на рисунке половина нити поворачивается на угол $\alpha = 1$ рад. При этом груз опускается на высоту

$$h = L \sin \alpha$$

относительно уровня спицы. Запишем закон сохранения механической энергии в виде

$$\frac{mV_K^2}{2} + \frac{mV_\Gamma^2}{2} + \frac{mV_B^2}{2} = mgh,$$

где m – масса кольца (груза), V_K – скорость кольца, а V_Γ и V_B – горизонтальная и вертикальная компоненты скорости груза.

Поскольку в любой момент времени груз находится посередине между кольцом и неподвижной точкой закрепления конца нити, его координата вдоль спицы x_Γ (отсчитываемая от точки закрепления нити) связана с координатой кольца x_K соотношением $x_\Gamma = x_K/2$. Таким же соотношением связаны, очевидно, и изменения координат за небольшой промежуток времени Δt : $\Delta x_\Gamma = \Delta x_K/2$ или $\Delta x_\Gamma/\Delta t = \Delta x_K/(2\Delta t)$. Учитывая, что $\Delta x_\Gamma/\Delta t = V_\Gamma$ и $\Delta x_K/\Delta t = V_K$, получаем

$$V_r = \frac{V_k}{2}.$$

Учитывая далее, что вектор скорости груза перпендикулярен радиусу окружности, по которой груз движется, выражаем вертикальную скорость груза как

$$V_b = V_r \operatorname{ctg} \alpha = \frac{V_k}{2} \operatorname{ctg} \alpha.$$

Подставляя найденные выражения для V_r и V_b в закон сохранения энергии, получаем

$$V_k = 2 \sin \alpha \sqrt{\frac{2gL \sin \alpha}{1 + 4 \sin^2 \alpha}}.$$

Разбалловка. Записан закон сохранения энергии – 5 баллов.

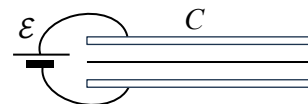
Найдена высота h – 5 баллов.

Найдено, что $V_r = 0,5V_k$ – 5 баллов.

Найдено, что $V_b = V_r \operatorname{ctg} \alpha$ – 5 баллов.

Получен ответ – 5 баллов.

3. (25 баллов) Плоский конденсатор емкости C подключен к батарее с ЭДС $\mathcal{E}$. После того, как в конденсатор посередине между обкладками вставили тонкую пластину с равномерно распределенным по ней положительным зарядом (см. рис.), напряженность электрического поля в пространстве между пластиной и одной из обкладок стала равной нулю. Чему равен заряд пластины, если она имеет те же размеры, что и обкладки конденсатора? Какую работу совершила батарея при внесении пластины в конденсатор?



Ответ. Заряд пластины равен $2C\mathcal{E}$. Работа батареи равна нулю.

Решение. Поскольку конденсатор подключен к батарее, разность потенциалов между его обкладками остается постоянной и равной $\mathcal{E}$. До внесения пластины в конденсатор на внутренних поверхностях его обкладок находились заряды $C\mathcal{E}$ и $-C\mathcal{E}$, которые создавали в конденсаторе электрическое поле с некоторой напряженностью $E_0 = \mathcal{E}/d$, где d – расстояние между обкладками. После внесения пластины разность потенциалов между обкладками равна разности потенциалов между пластиной и отрицательно заряженной (нижней на рисунке) обкладкой, расстояние между которыми равно $d/2$ (разность потенциалов между пластиной и верхней обкладкой равна нулю, т.к. между ними поля нет). Чтобы разность потенциалов осталась прежней ($\mathcal{E}$), напряженность поля между пластиной и нижней обкладкой должна стать равной $2E_0$. Вдвое большему полю соответствует вдвое больший по модулю заряд на внутренней поверхности нижней пластины, т.е. $-2C\mathcal{E}$ (все силовые линии поля заканчиваются на этом заряде, внутри металлической обкладки поля нет). Поскольку все выходящие из пластины силовые линии поля заканчиваются на нижней обкладке (над пластиной поля нет), заряд пластины равен по модулю заряду нижней обкладки, т.е. $2C\mathcal{E}$.

После внесения пластины на внешних поверхностях обкладок появятся одинаковые положительные заряды, равные $C\mathcal{E}$. Это связано с тем, что полный заряд конденсатора с пластиной равен заряду пластины (батарея может только перераспределять заряды между обкладками, не меняя их суммарного нулевого заряда). Из-за ненулевого заряда системы от нее должны симметрично расходиться силовые линии электрического поля, начинающиеся на внешних поверхностях обкладок. С учетом сказанного заряд каждой обкладки остался прежним после внесения пластины ($C\mathcal{E}$ у верхней обкладки и $-C\mathcal{E}$ у нижней). Следовательно, при внесении пластины ток через батарею не протекал, и батарея работы не совершала.

Разбалловка. Указаны заряды обкладок до внесения пластины – 5 баллов.

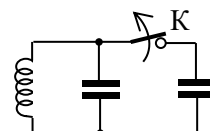
Указаны заряды на внутренних поверхностях обкладок после внесения пластины – 5 баллов.

Найден заряд пластины – 5 баллов.

Указаны заряды на внешних поверхностях пластин – 5 баллов.

Найдена работа батареи – 5 баллов.

4. (25 баллов) В колебательном контуре, состоящем из катушки индуктивности и двух параллельно соединенных с помощью ключа K конденсаторов одинаковой емкости (см. рис.), происходят колебания с амплитудой тока I_0 . В момент, когда ток через катушку равен $I_0/2$, ключ размыкают. Какой станет амплитуда колебаний тока в контуре? Сопротивлением катушки и соединительных проводов пренебречь.



Ответ. Амплитуда тока равна $I_0\sqrt{5/8}$.

Решение. Обозначим индуктивность катушки через L , а емкость конденсатора через C . До размыкания ключа два конденсатора эквивалентны одному емкостью $2C$. Чтобы найти суммарный заряд q конденсаторов в момент размыкания, запишем закон сохранения энергии в виде

$$\frac{LI_0^2}{2} = \frac{L(I_0/2)^2}{2} + \frac{q^2}{4C},$$

откуда получаем

$$q = I_0 \sqrt{\frac{3}{2}LC}.$$

После размыкания ключа колебания будут идти в колебательном контуре с одним конденсатором емкостью C при начальном заряде на конденсаторе $q/2$ и начальном токе в катушке $I_0/2$. Связывая законом сохранения энергии начальный момент и момент, когда ток в катушке достигает максимального значения I , а заряд конденсатора обращается в нуль, запишем

$$\frac{LI^2}{2} = \frac{L(I_0/2)^2}{2} + \frac{(q/2)^2}{2C}.$$

Подставляя в записанное соотношение найденный заряд q , получаем

$$I = I_0 \sqrt{\frac{5}{8}}.$$

Разбалловка. Записан закон сохранения энергии для контура с двумя конденсаторами – 5 баллов.

Найден заряд q – 5 баллов.

Записан закон сохранения энергии для контура с одним конденсатором – 10 баллов.

Получен ответ – 5 баллов.