

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ И РАЗБАЛЛОВКИ

Вариант 1.

10 класс

1. (30 баллов) Брошенное в момент $t = 0$ под углом к горизонту тело оказалось на одной высоте в моменты t_1 и t_2 , и за время $t_2 - t_1$ вектор скорости тела повернулся на 90° . Под каким углом к горизонту было брошено тело?

Ответ. Угол броска α определяется формулой $\operatorname{tg} \alpha = (t_1 + t_2)/(t_2 - t_1)$.

Решение. Обозначив искомый угол через α и отсчитывая время t от момента броска, запишем горизонтальную (x) и вертикальную (y) компоненты скорости тела как

$$V_x = V_0 \cos \alpha, \quad V_y = V_0 \sin \alpha - gt.$$

Поскольку тело в моменты времени t_1 и t_2 находилось на одной высоте, его y -компоненты скорости $V_y(t_1)$ и $V_y(t_2)$ отличались только знаком. При одинаковой x -компоненте это означает, что векторы скорости были направлены симметрично (вверх-вниз) к горизонту. Из условия поворота вектора скорости на 90° можно понять, что в момент t_1 вектор скорости был направлен под углом $+45^\circ$ к горизонту, т.е. выполнялось соотношение $V_y(t_1) = V_x$, а в момент t_2 – под углом -45° , т.е. выполнялось соотношение $V_y(t_2) = -V_x$. Из данных соотношений следуют уравнения

$$V_0 \sin \alpha - gt_1 = V_0 \cos \alpha, \quad V_0 \sin \alpha - gt_2 = -V_0 \cos \alpha.$$

Удобно сложить эти уравнения и вычесть одно из другого. Тогда получим

$$2V_0 \sin \alpha = g(t_1 + t_2), \quad 2V_0 \cos \alpha = g(t_2 - t_1),$$

Поделив первое уравнение на второе, находим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{t_1 + t_2}{t_2 - t_1}.$$

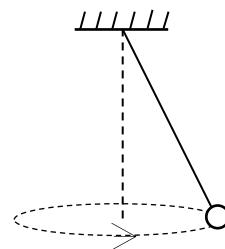
Разбалловка. Записаны общие формулы для компонент скорости – 5 баллов.

Поняты направления векторов скорости – 5 баллов.

Составлена система уравнений связи V_0 и α – по 5 баллов за уравнение.

Получена формула для угла броска – 10 баллов.

2. (30 баллов) Прикрепленный нитью к потолку шарик совершает вращательное движение в горизонтальной плоскости (см. рис.). Считая, что потенциальная энергия шарика в поле тяжести равна нулю на уровне точки подвеса, найти угол между нитью и вертикалью, при котором механическая энергия шарика равна нулю.



Ответ. Искомый угол α определяется формулой $\cos \alpha = 1/\sqrt{3}$ и составляет $\approx 55^\circ$.

Решение. Обозначив искомый угол через α , запишем равенство вертикальной компоненты силы натяжения нити T силе тяжести mg (m – масса тела, g – ускорение свободного падения):

$$T \cos \alpha = mg.$$

Обозначив длину нити через L и скорость шарика через V , запишем второй закон Ньютона для движущегося по окружности (радиуса $L \sin \alpha$) шарика в проекции на направление к центру окружности

$$\frac{mV^2}{L \sin \alpha} = T \sin \alpha$$

и условие равенства нулю механической энергии шарика

$$\frac{mV^2}{2} - mgL \cos \alpha = 0$$

Исключая из двух последних формул V^2 , приходим к уравнению

$$T \sin^2 \alpha = 2mg \cos \alpha.$$

Рассматривая это уравнение совместно с уравнением $T \cos \alpha = mg$, после исключения T приходим к формуле для искомого угла

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

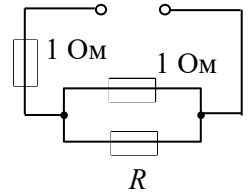
Разбалловка. Записан баланс сил в вертикальном направлении – 5 баллов.

Записан второй закон Ньютона в проекции на центростремительное направление – 10 баллов.

Записано условие равенства нулю механической энергии – 10 баллов.

Получена формула для угла – 5 баллов.

3. (40 баллов) К источнику постоянного напряжения подключена цепь, в которой два резистора имеют сопротивление 1 Ом (см. рис.). При каком сопротивлении R третьего резистора в нем будет выделяться максимальная мощность?



Ответ. При сопротивлении $R = 0,5$ Ом.

Решение. Обозначив напряжение источника через U , запишем полный ток в цепи I_0 как

$$I_0 = \frac{U}{1 + R/(R + 1)},$$

где $R/(R + 1)$ – сопротивление параллельно соединенных резисторов. Ток I_R через резистор с сопротивлением R можно найти из условия $I_R R = I_0 R/(R + 1)$ и записать как

$$I_R = \frac{I_0}{R + 1} = \frac{U}{2R + 1}.$$

Выделяемая на резисторе R мощность P равна

$$P = I_R^2 R = \frac{U^2 R}{(2R + 1)^2}.$$

Чтобы исследовать полученное выражение на максимум, приведем его к виду

$$P = \frac{U^2}{2(\sqrt{2R} + 1/\sqrt{2R})^2}.$$

Минимальное значение суммы взаимобратных величин в знаменателе достигается при $\sqrt{2R} = 1$. Отсюда находим, что $R = 1/2$, т.е. 0,5 Ом.

Разбалловка. Записан полный ток в цепи – 10 баллов.

Записан ток через резистор R – 10 баллов.

Мощность представлена как функция одной переменной R – 10 баллов.

Проведен анализ функции на максимум и получен ответ – 10 баллов.

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ И РАЗБАЛЛОВКИ

Внимание: квант оценки равен 5 (можно ставить только 0, 5, 10, 15 и т. д. баллов)!

10 класс

1. (30 баллов) Брошенное в момент $t = 0$ под углом к горизонту тело оказалось на одной высоте в моменты t_1 и t_2 , и за время $t_2 - t_1$ вектор скорости тела повернулся на 90° . Найти начальную скорость тела. Ускорение свободного падения равно g .

Ответ. Начальная скорость равна $g\sqrt{(t_1^2 + t_2^2)/2}$.

Решение. Обозначив угол броска через α , начальную скорость через V_0 и ускорение свободного падения через g , запишем горизонтальную (x) и вертикальную (y) компоненты скорости тела как

$$V_x = V_0 \cos \alpha, \quad V_y = V_0 \sin \alpha - gt.$$

Поскольку тело в моменты времени t_1 и t_2 находилось на одной высоте, его y -компоненты скорости $V_y(t_1)$ и $V_y(t_2)$ отличались только знаком. При одинаковой x -компоненте это означает, что векторы скорости были направлены симметрично (под равными углами вверх и вниз) к горизонту. Из условия поворота вектора скорости на 90° можно понять, что в момент t_1 вектор скорости был направлен под углом $+45^\circ$ к горизонту, т.е. выполнялось соотношение $V_y(t_1) = V_x$, а в момент t_2 – под углом -45° , т.е. выполнялось соотношение $V_y(t_2) = -V_x$. Из данных соотношений следуют уравнения

$$V_0 \sin \alpha - gt_1 = V_0 \cos \alpha, \quad V_0 \sin \alpha - gt_2 = -V_0 \cos \alpha.$$

Удобно сложить эти уравнения и вычесть одно из другого. Тогда получим

$$2V_0 \sin \alpha = g(t_1 + t_2), \quad 2V_0 \cos \alpha = g(t_2 - t_1).$$

Возводя эти формулы в квадрат, складывая и используя тождество $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, окончательно находим

$$V_0 = g \sqrt{\frac{t_1^2 + t_2^2}{2}}.$$

Разбалловка. Записаны общие формулы для компонент скорости – 5 баллов.

Поняты направления векторов скорости – 5 баллов.

Составлена система уравнений связи V_0 и α – по 5 баллов за уравнение.

Найдена начальная скорость – 10 баллов.

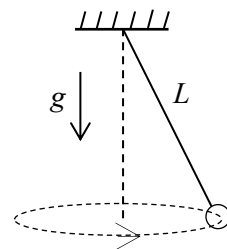
2. (30 баллов) Прикрепленный нитью длины L к потолку шарик совершает вращательное движение в горизонтальной плоскости (см. рис.). Считая, что потенциальная энергия шарика в поле тяжести равна нулю на уровне точки подвеса, найти скорость движения шарика, при которой его механическая энергия равна нулю. Ускорение свободного падения равно g .

Ответ. Скорость шарика равна $\sqrt{2gL}/\sqrt[4]{3}$.

Решение. Обозначив угол между нитью и вертикалью через α , запишем равенство вертикальной компоненты силы натяжения нити T силе тяжести mg (m – масса тела, g – ускорение свободного падения):

$$T \cos \alpha = mg.$$

Обозначив скорость шарика через V , запишем второй закон Ньютона для движущегося по окружности (радиуса $L \sin \alpha$) шарика в проекции на направление к центру окружности



$$\frac{mV^2}{L \sin \alpha} = T \sin \alpha$$

и условие равенства нулю механической энергии шарика

$$\frac{mV^2}{2} - mgL \cos \alpha = 0.$$

Выразим из последнего уравнения $\cos \alpha$:

$$\cos \alpha = \frac{V^2}{2gL},$$

а из первых двух исключим силу T и получим

$$\frac{V^2}{gL} \cos \alpha = \sin^2 \alpha.$$

Исключая угол α из двух последних уравнений, находим скорость шарика:

$$V = \frac{\sqrt{2gL}}{\sqrt[4]{3}}.$$

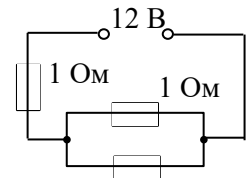
Разбалловка. Записан баланс сил в вертикальном направлении – 5 баллов.

Записан второй закон Ньютона в проекции на центростремительное направление – 10 баллов.

Записано условие равенства нулю механической энергии – 10 баллов.

Найдена скорость шарика – 5 баллов.

3. (40 баллов) К источнику напряжением 12 В подключена цепь, в которой два резистора имеют сопротивление 1 Ом (см. рис.). Сопротивление третьего резистора подбирают так, чтобы на нем выделялась максимальная тепловая мощность. Чему равна эта мощность?



Ответ. 18 Вт.

Решение. Обозначим напряжение источника (12 В) через U , неизвестное сопротивление через R и запишем полный ток в цепи I_0 как

$$I_0 = \frac{U}{1 + R/(R + 1)},$$

где $R/(R + 1)$ – сопротивление параллельно соединенных резисторов. Ток I_R через резистор с сопротивлением R можно найти из условия $I_R R = I_0 R/(R + 1)$ и записать как

$$I_R = \frac{I_0}{R + 1} = \frac{U}{2R + 1}.$$

Выделяемая на резисторе R мощность P равна

$$P = I_R^2 R = \frac{U^2 R}{(2R + 1)^2}.$$

Чтобы исследовать полученное выражение на максимум, приведем его к виду

$$P = \frac{U^2}{2(\sqrt{2R} + 1/\sqrt{2R})^2}.$$

Минимальное значение суммы взаимобратных величин в знаменателе достигается при $\sqrt{2R} = 1$. При этом P имеет максимальное значение

$$P = \frac{U^2}{8} = \frac{144}{8} = 18 \text{ Вт.}$$

Разбалловка. Записан полный ток в цепи – 10 баллов.

Записан ток через резистор R – 10 баллов.

Мощность представлена как функция одной переменной R – 10 баллов.

Проведен анализ функции на максимум и получен ответ – 10 баллов.