

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ И РАЗБАЛЛОВКИ

Вариант 1.

11 класс

1. (30 баллов) Брошенное в момент $t = 0$ под углом к горизонту тело оказалось на одной высоте в моменты t_1 и t_2 , и за время $t_2 - t_1$ вектор скорости тела повернулся на 90° . Под каким углом к горизонту было брошено тело?

Ответ. Под углом α , определяемым формулой $\operatorname{tg} \alpha = (t_1 + t_2)/(t_2 - t_1)$.

Решение. Обозначив угол броска через α , начальную скорость через V_0 и ускорение свободного падения через g , запишем горизонтальную (x) и вертикальную (y) компоненты скорости тела как

$$V_x = V_0 \cos \alpha, \quad V_y = V_0 \sin \alpha - gt.$$

Поскольку тело в моменты времени t_1 и t_2 находилось на одной высоте, его y -компоненты скорости $V_y(t_1)$ и $V_y(t_2)$ отличались только знаком. При одинаковой x -компоненте это означает, что векторы скорости были направлены симметрично (под равными углами вверх и вниз) к горизонту. Из условия поворота вектора скорости на 90° можно понять, что в момент t_1 вектор скорости был направлен под углом $+45^\circ$ к горизонту, т.е. выполнялось соотношение $V_y(t_1) = V_x$, а в момент t_2 – под углом -45° , т.е. выполнялось соотношение $V_y(t_2) = -V_x$. Из данных соотношений следуют уравнения

$$V_0 \sin \alpha - gt_1 = V_0 \cos \alpha, \quad V_0 \sin \alpha - gt_2 = -V_0 \cos \alpha.$$

Удобно сложить эти уравнения и вычесть одно из другого. Тогда получим

$$2V_0 \sin \alpha = g(t_1 + t_2), \quad 2V_0 \cos \alpha = g(t_2 - t_1).$$

Поделив первое уравнение на второе, находим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{t_1 + t_2}{t_2 - t_1}.$$

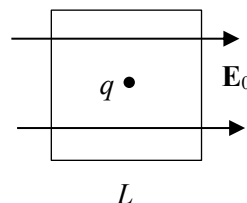
Разбалловка. Записаны общие формулы для компонент скорости – 5 баллов.

Поняты направления векторов скорости – 5 баллов.

Составлена система уравнений связи V_0 и α – по 5 баллов за уравнение.

Получена формула для угла броска – 10 баллов.

2. (30 баллов) Точечный заряд q находится в однородном поле напряженностью E_0 в центре квадрата, сторона которого равна L и две стороны которого параллельны E_0 (см. рис.). Найти максимальную разность потенциалов между точками на сторонах квадрата.



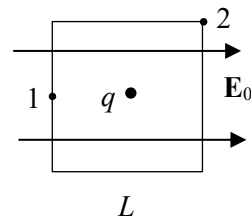
Ответ. Максимальная разность потенциалов равна $\frac{(\sqrt{2}-1)q}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 L} + E_0 L$, где ϵ_0 – электрическая постоянная.

Решение. Согласно принципу суперпозиции разность потенциалов между точками можно находить как сумму вкладов от точечного заряда и поля E_0 . Вклад в разность потенциалов от точечного заряда максимален, если одна точка расположена наиболее близко к заряду (середина стороны квадрата), а другая – наиболее далеко (вершина квадрата). Вклад от однородного поля максимален, если одна точка находится на левой стороне квадрата, а другая – на правой. Приходим к выводу, что разность потенциалов максимальна между серединой левой стороны квадрата и любой из его правых вершин (две точки 1 и 2 указаны на рисунке).

Используя формулу для потенциала точечного заряда

$$\varphi = \frac{kq}{r},$$

где r – расстояние от заряда, $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ и ϵ_0 – электрическая постоянная, запишем разность потенциалов между точками 1 и 2 как



$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{kq}{L/2} - \frac{kq}{L/\sqrt{2}} + E_0 L = \frac{k(2 - \sqrt{2})q}{L} + E_0 L = \frac{(\sqrt{2} - 1)q}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 L} + E_0 L.$$

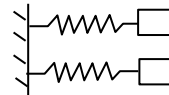
Разбалловка. Понято расположение точек – 10 баллов.

Найден вклад в разность потенциалов от точечного заряда – 10 баллов.

Найден вклад от однородного поля – 5 баллов.

Получен ответ – 5 баллов.

3. (40 баллов) Два груза равной массы находятся на гладком горизонтальном столе и прикреплены к стене недеформированными пружинами равной жесткости k (см. рис.). Смещая грузы вдоль стола от стены, каждую из пружин растягивают на длину L , затем один из грузов освобождают, а когда он смещается на $L/2$, освобождают и второй. Какого максимального значения достигает суммарная энергия упругой деформации двух пружин в ходе колебаний? Колебания считать гармоническими.



Ответ. Максимальная суммарная энергия упругой деформации равна $3kL^2/4$.

Решение. Направим ось x от стены, выбрав за нуль положение грузов при недеформированных пружинах. Зависимость от времени координаты первого груза можно записать в виде

$$x_1 = L \cos \omega t,$$

где через ω обозначена угловая частота колебаний. После освобождения груза он начинает двигаться к стене, и после смещения на $L/2$ его координата принимает значение $x_1 = L/2$, т.е. $L \cos \omega t = L/2$. Отсюда находим, что $\omega t = \pi/3$. Поскольку второй груз освобождают в этот момент, зависимость от времени его координаты можно записать в виде

$$x_2 = L \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{3} \right),$$

где частота ω – та же самая, что у первого груза, в силу равенства масс грузов и жесткостей пружин.

Суммарную энергию упругой деформации двух пружин запишем в виде

$$W = \frac{kx_1^2}{2} + \frac{kx_2^2}{2} = \frac{kL^2}{2} \left[\cos^2 \omega t + \cos^2 \left(\omega t - \frac{\pi}{3} \right) \right].$$

Переходя к косинусам удвоенных аргументов, получаем

$$W = \frac{kL^2}{4} \left[2 + \cos 2\omega t + \cos \left(2\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \right].$$

Используя формулу для суммы косинусов, получаем удобное для анализа выражение

$$W = \frac{kL^2}{2} \left[1 + \cos \frac{\pi}{3} \cos \left(2\omega t - \frac{\pi}{3} \right) \right].$$

Максимальное значение данного выражения достигается при $\cos \left(2\omega t - \frac{\pi}{3} \right) = 1$ и равно

$$W_{\max} = \frac{3kL^2}{4}.$$

Разбалловка. Записана зависимость от времени координаты первого груза – 5 баллов.

Записана зависимость от времени координаты второго груза – 10 баллов.

Составлено выражение для суммарной упругой энергии – 5 баллов.

Выражение преобразовано к удобному для анализа виду – 10 баллов.

Найдена максимальная энергия – 10 баллов.

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ И РАЗБАЛЛОВКИ

Внимание: квант оценки равен 5 (можно ставить только 0, 5, 10, 15 и т. д. баллов)!

11 класс

1. (30 баллов) Брошенное в момент $t = 0$ под углом к горизонту тело оказалось на одной высоте в моменты t_1 и t_2 , и за время $t_2 - t_1$ вектор скорости тела повернулся на 90° . Найти начальную скорость тела. Ускорение свободного падения равно g .

Ответ. Начальная скорость равна $g\sqrt{(t_1^2 + t_2^2)/2}$.

Решение. Обозначив угол броска через α , начальную скорость через V_0 и ускорение свободного падения через g , запишем горизонтальную (x) и вертикальную (y) компоненты скорости тела как

$$V_x = V_0 \cos \alpha, \quad V_y = V_0 \sin \alpha - gt.$$

Поскольку тело в моменты времени t_1 и t_2 находилось на одной высоте, его y -компоненты скорости $V_y(t_1)$ и $V_y(t_2)$ отличались только знаком. При одинаковой x -компоненте это означает, что векторы скорости были направлены симметрично (под равными углами вверх и вниз) к горизонту. Из условия поворота вектора скорости на 90° можно понять, что в момент t_1 вектор скорости был направлен под углом $+45^\circ$ к горизонту, т.е. выполнялось соотношение $V_y(t_1) = V_x$, а в момент t_2 – под углом -45° , т.е. выполнялось соотношение $V_y(t_2) = -V_x$. Из данных соотношений следуют уравнения

$$V_0 \sin \alpha - gt_1 = V_0 \cos \alpha, \quad V_0 \sin \alpha - gt_2 = -V_0 \cos \alpha.$$

Удобно сложить эти уравнения и вычесть одно из другого. Тогда получим

$$2V_0 \sin \alpha = g(t_1 + t_2), \quad 2V_0 \cos \alpha = g(t_2 - t_1).$$

Возводя эти формулы в квадрат, складывая и используя тождество $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, окончательно находим

$$V_0 = g \sqrt{\frac{t_1^2 + t_2^2}{2}}.$$

Разбалловка. Записаны общие формулы для компонент скорости – 5 баллов.

Поняты направления векторов скорости – 5 баллов.

Составлена система уравнений связи V_0 и α – по 5 баллов за уравнение.

Найдена начальная скорость – 10 баллов.

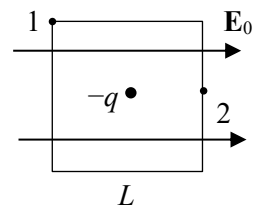
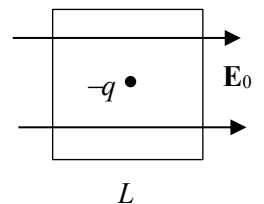
2. (30 баллов) Точечный заряд $-q$ находится в однородном поле напряженностью E_0 в центре квадрата, сторона которого равна L и две стороны которого параллельны E_0 (см. рис.). Найти максимальную разность потенциалов между точками на сторонах квадрата.

Ответ. Максимальная разность потенциалов равна $\frac{(\sqrt{2}-1)q}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 L} + E_0 L$, где ϵ_0 – электрическая постоянная.

Решение. Согласно принципу суперпозиции разность потенциалов между точками можно находить как сумму вкладов от точечного заряда и поля E_0 . Вклад в разность потенциалов от (отрицательного) точечного заряда максимален, если одна точка расположена наиболее далеко от заряда (вершина квадрата), а другая – наиболее близко к заряду (середина стороны квадрата). Вклад от однородного поля максимален, если одна точка находится на левой стороне квадрата, а другая – на правой. Приходим к выводу, что разность потенциалов максимальна между любой из левых вершин квадрата и серединой его правой стороны (две точки 1 и 2 указаны на рисунке).

Используя формулу для потенциала точечного заряда

$$\varphi = \frac{k(-q)}{r},$$



где r – расстояние от заряда, $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ и ϵ_0 – электрическая постоянная, запишем разность потенциалов между точками 1 и 2 как

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{kq}{L/\sqrt{2}} + \frac{kq}{L/2} + E_0L = \frac{k(2 - \sqrt{2})q}{L} + E_0L = \frac{(\sqrt{2} - 1)q}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0L} + E_0L.$$

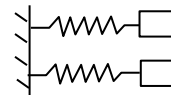
Разбалловка. Понято расположение точек – 10 баллов.

Найден вклад в разность потенциалов от точечного заряда – 10 баллов.

Найден вклад от однородного поля – 5 баллов.

Получен ответ – 5 баллов.

3. (40 баллов) Два груза равной массы m находятся на гладком горизонтальном столе и прикреплены к стене недеформированными пружинами равной жесткости k (см. рис.). Смещая грузы вдоль стола от стены, каждую из пружин растягивают на длину L , затем один из грузов освобождают, а когда он смещается на $L/2$, освобождают и второй. Через какое время после освобождения первого груза суммарная энергия упругой деформации двух пружин достигнет максимального значения в первый раз? Чему равно это значение? Колебания считать гармоническими.



Ответ. Максимальная суммарная энергия упругой деформации достигается через время $\frac{7\pi}{6} \sqrt{\frac{m}{k}}$ и равна $3kL^2/4$.

Решение. Направим ось x от стены, выбрав за нуль положение грузов при недеформированных пружинах. Зависимость от времени координаты первого груза можно записать в виде

$$x_1 = L \cos \omega t,$$

где $\omega = \sqrt{k/m}$ – угловая частота колебаний. После освобождения груза он начинает двигаться к стене, и после смещении на $L/2$ его координата принимает значение $x_1 = L/2$, т.е. $L \cos \omega t = L/2$. Отсюда находим, что $\omega t = \pi/3$. Поскольку второй груз освобождают в этот момент, зависимость от времени его координаты можно записать в виде

$$x_2 = L \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{3} \right),$$

где ω – та же самая, что у первого груза, в силу равенства масс грузов и жесткостей пружин.

Суммарную энергию упругой деформации двух пружин запишем в виде

$$W = \frac{kx_1^2}{2} + \frac{kx_2^2}{2} = \frac{kL^2}{2} \left[\cos^2 \omega t + \cos^2 \left(\omega t - \frac{\pi}{3} \right) \right].$$

Переходя к косинусам удвоенных аргументов, получаем

$$W = \frac{kL^2}{4} \left[2 + \cos 2\omega t + \cos \left(2\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \right].$$

Используя формулу для суммы косинусов, получаем удобное для анализа выражение

$$W = \frac{kL^2}{2} \left[1 + \cos \frac{\pi}{3} \cos \left(2\omega t - \frac{\pi}{3} \right) \right].$$

Максимальное значение достигается при $\cos \left(2\omega t - \frac{\pi}{3} \right) = 1$ и равно

$$W_{\max} = \frac{3kL^2}{4}.$$

Значение $\cos \left(2\omega t - \frac{\pi}{3} \right) = 1$ в первый раз достигается при $2\omega t - \frac{\pi}{3} = 2\pi$, т.е. в момент времени

$$t = \frac{7\pi}{6\omega} = \frac{7\pi}{6} \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Разбалловка. Записана зависимость от времени координаты первого груза – 5 баллов.

Записана зависимость от времени координаты второго груза – 10 баллов.

Составлено выражение для суммарной упругой энергии – 5 баллов.

Выражение преобразовано к удобному для анализа виду – 10 баллов.

Найдена максимальная энергия – 5 баллов.

Найдено время – 5 баллов.