

ОЛИМПИАДА “БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ – БУДУЩЕЕ НАУКИ” 2025/26
Физика, II тур

10 класс

1. (25 баллов) Тело бросили с земли под углом к горизонту так, что через половину времени полета оно оказалось на том же расстоянии от точки броска, что и в момент приземления. Под каким углом было брошено тело? Через какую часть времени полета тело еще раз оказывалось на том же расстоянии от точки броска?

Ответ. Угол броска определяется формулой $\sin \alpha = \sqrt{12/13}$ и примерно равен $\alpha \approx 74^\circ$. Через $\frac{3+\sqrt{33}}{12} \approx 0,73$ времени полета.

Решение. Обозначив начальную скорость тела через V_0 и угол броска через α , запишем горизонтальную (x) и вертикальную (y) координаты тела в произвольный момент времени t как

$$x = V_0 \cos \alpha t, \quad y = V_0 \sin \alpha t - gt^2/2,$$

а расстояние R от точки броска до тела как

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{V_0^2 t^2 - V_0 \sin \alpha g t^3 + g^2 t^4 / 4}.$$

Подставляя в данное выражение $t = t_{\pi}/2$, где $t_{\pi} = 2V_0 \sin \alpha / g$ – время полета, и приравнивая данное выражение к горизонтальной дальности полета $L = 2V_0^2 \sin \alpha \cos \alpha / g$, получаем формулу для угла броска

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{12}{13}},$$

откуда следует, что $\alpha \approx 74^\circ$.

Теперь найдем третий момент времени, когда $R(t) = L$. Для этого удобно использовать то обстоятельство, что $L = R(t_{\pi})$. Записывая условие $R(t) = R(t_{\pi})$, приходим к уравнению

$$g^2(t^4 - t_{\pi}^4) - 4V_0 \sin \alpha g(t^3 - t_{\pi}^3) + 4V_0^2(t^2 - t_{\pi}^2) = 0,$$

которое определяет все моменты времени, когда удаление тела от точки броска равно горизонтальной дальности полета. После сокращения на $t - t_{\pi}$ (корень $t = t_{\pi}$ нас не интересует) приходим к кубическому уравнению, которое можно привести к виду

$$t^3 - t_{\pi}t^2 + \operatorname{ctg}^2 \alpha t_{\pi}^2 t + \operatorname{ctg}^2 \alpha t_{\pi}^3 = 0.$$

Один из корней этого уравнения ($t = t_{\pi}/2$) известен. Чтобы найти остальные корни, поделим данный многочлен на $t - t_{\pi}/2$ и придем к квадратному уравнению

$$6t^2 - 3t_{\pi}t - t_{\pi}^2 = 0.$$

Записывая корни данного уравнения

$$t_{1,2} = t_{\pi} \frac{3 \pm \sqrt{33}}{12}$$

и отбрасывая отрицательный корень как нефизичный, окончательно получаем

$$t = t_{\pi} \frac{3 + \sqrt{33}}{12} \approx 0,73.$$

Разбалловка. Записана формула для удаления тела от точки броска – 5 баллов.

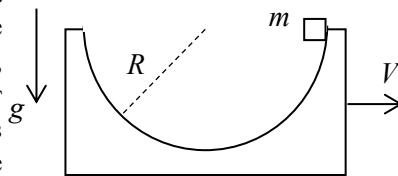
Найден угол броска – 5 баллов.

Получено кубическое уравнение для t – 5 баллов.

Получено квадратное уравнение для t – 5 баллов.

Найден третий момент времени – 5 баллов.

2. (25 баллов) Брусок с выемкой в виде полуцилиндра радиуса R двигают в горизонтальном направлении со скоростью V , удерживая в верхней точке выемки кубик массы m (см. рис.). В некоторый момент кубик освобождают, продолжая двигать брусок с прежней скоростью. Какую работу совершит над кубиком сила реакции бруска к моменту, когда кубик, скользя без трения по поверхности выемки, достигнет ее нижней точки? Ускорение свободного падения равно g .



Ответ. Сила реакции совершит работу, равную $-mV\sqrt{2gR}$.

Решение. Перейдем в инерциальную систему отсчета, движущуюся вместе с бруском. В этой системе отсчета сила реакции бруска работы не совершает (скорость кубика все время перпендикулярна силе реакции), поэтому механическая энергия кубика сохраняется. Обозначив скорость кубика в сопровождающей брусок системе отсчета в момент, когда кубик достигнет нижней точки, через v , запишем закон сохранения механической энергии в виде

$$\frac{mv^2}{2} = mgR,$$

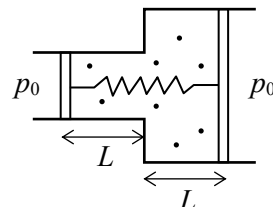
откуда получаем $v = \sqrt{2gR}$. Вернемся в неподвижную систему отсчета. В этой системе отсчета сила реакции работу совершает, и эта работа равна изменению механической энергии кубика, т.е.

$$A = \frac{m(V - v)^2}{2} - \left(\frac{mV^2}{2} + mgR \right) = -mVv = -mV\sqrt{2gR}.$$

Здесь учтено, что в нижней точке выемки скорость кубика равна по величине $|V - v|$.

Разбалловка. Найдена скорость кубика в нижней точке в движущейся системе отсчета – 5 баллов.
Записана скорость кубика в нижней точке в неподвижной системе отсчета – 5 баллов.
Работа записана через изменение механической энергии – 10 баллов.
Получен ответ – 5 баллов.

3. (25 баллов) В соединенных горизонтальных трубах сечений S и $2S$ могут скользить без трения поршни, связанные пружиной жесткости k и находящиеся на расстояниях L от места соединения (см. рис.). Между поршнями находится 1 моль идеального одноатомного газа. Концы труб открыты в атмосферу с давлением воздуха p_0 . Какое максимальное количество теплоты можно отвести от газа без деформации пружины? Какое количество теплоты необходимо отвести, чтобы длина пружины уменьшилась вдвое?



Ответ. Без деформации пружины можно отвести количество теплоты, равное $\frac{5}{2}p_0SL$. Чтобы длина пружины уменьшилась вдвое, необходимо отвести количество теплоты, равное $5p_0SL + kL^2$.

Решение. Исходное равновесное состояние поршней возможно только в том случае, если пружина недеформирована и давление газа между поршнями равно p_0 . Записывая для исходного состояния уравнение Клапейрона-Менделеева в виде

$$p_0(SL + 2SL) = RT_0,$$

(R – молярная газовая постоянная), находим начальную температуру газа

$$T_0 = \frac{3p_0SL}{R}.$$

При отводе тепла от газа изменение состояния системы будет происходить в два этапа. На первом этапе пружина остается недеформированной, давление газа остается равным p_0 , а поршни смещаются влево на одинаковое расстояние. Так будет продолжаться до тех пор, пока правый поршень не упрется в место соединения. На последующем втором этапе правый поршень будет оставаться неподвижным, а левый поршень будет смещаться вправо, сжимая пружину.

Чтобы найти температуру газа в конце первого этапа T_1 , запишем уравнение Клапейрона-Менделеева для этого момента в виде

$$p_0 2SL = RT_1,$$

откуда получаем, что

$$T_1 = \frac{2p_0SL}{R}.$$

Найдем теперь количество теплоты Q_1 , отведенное от газа на первом этапе. Для этого запишем первый принцип термодинамики в виде

$$Q_1 = p_0SL + \frac{3}{2}R(T_0 - T_1),$$

где p_0SL – работа атмосферы над газом, а $\frac{3}{2}R(T_0 - T_1)$ – убыль внутренней энергии газа. Подставляя найденные значения для T_1 и T_0 , получаем

$$Q_1 = \frac{5}{2}p_0SL.$$

Перейдем к рассмотрению второго этапа. Чтобы найти давление газа в конце второго этапа p , запишем уравнение баланса сил, действующих на левый поршень в этот момент, в виде

$$p_0S = pS + kL.$$

Отсюда следует, что

$$p = p_0 - \frac{kL}{S}.$$

Теперь найдем температуру газа в конце второго этапа T_2 . Для этого запишем уравнение Клапейрона-Менделеева в виде

$$pSL = RT_2,$$

откуда получаем

$$T_2 = \frac{pSL}{R} = \frac{p_0SL}{R} - \frac{kL^2}{R}.$$

Найдем теперь количество теплоты Q_2 , отведенное от газа на втором этапе. Для этого запишем первый принцип термодинамики в виде

$$Q_2 = p_0SL - \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) - \frac{kL^2}{2},$$

откуда получаем

$$Q_2 = \frac{5}{2}p_0SL + kL^2.$$

Полное отведенное количество теплоты находим как $Q = Q_1 + Q_2$ и получаем

$$Q = 5p_0SL + kL^2.$$

Разбалловка. Указано, что на первом этапе давление постоянно – 5 баллов.

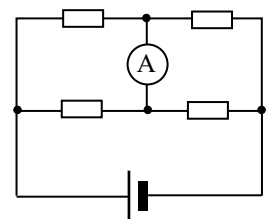
Найдено Q_1 – 5 баллов.

Найдено давление в конце второго этапа – 5 баллов.

Найдено Q_2 – 5 баллов.

Получен ответ – 5 баллов.

4. (25 баллов) В представленной на рисунке цепи сопротивления резисторов в верхней ветви одинаковы и вдвое больше, чем сопротивления в нижней, сопротивление амперметра и внутреннее сопротивление батареи пренебрежимо малы. После того, как один из резисторов в нижней ветви заменили на другой – с неизвестным номиналом, амперметр стал показывать ток I_A . На сколько при этом изменился ток через батарею?



Ответ. Ток изменился на $3I_A/2$.

Решение. Обозначим сопротивления резисторов в верхней ветви через R , ток через эти резисторы в исходной цепи через I_0 , ток в левом верхнем резисторе после изменения цепи через I_1 , а в правом верхнем – через I_2 . Поскольку напряжение на последовательно включенных верхних резисторах остается неизменным (равным ЭДС батареи), можно записать равенство

$$I_0 R + I_0 R = I_1 R + I_2 R.$$

От того, какой именно из нижних резисторов заменили и увеличился или уменьшился номинал резистора, зависит только направление тока через амперметр и знак изменения тока через батарею. Для определенности будем считать, что заменили левый нижний резистор и его номинал уменьшился. В этом случае ток через амперметр потечет вверх, и можно написать соотношение

$$I_1 = I_2 - I_A.$$

Исключая из записанных соотношений ток I_1 , получаем

$$I_2 - I_0 = \frac{I_A}{2}.$$

Теперь заметим, что в силу пренебрежимо малого сопротивления амперметра напряжения на правом верхнем и правом нижнем резисторах одинаковы и в исходной цепи, и после ее изменения. Следовательно, ток через правый нижний резистор (имеющий сопротивление $R/2$) всегда вдвое больше тока через правый верхний резистор (имеющий сопротивление R). Ток через батарею равен сумме токов через правые резисторы и составляет $3I_0$ в исходной цепи и $3I_2$ после ее изменения. Изменение тока через батарею равно $\Delta I = 3I_2 - 3I_0$ и с учетом найденной ранее разности токов $I_2 - I_0$ выражается как

$$\Delta I = \frac{3I_A}{2}.$$

Возможна несколько иная форма записи решения, в которой токи до и после изменения цепи записываются через ЭДС батареи.

Разбалловка. Использовано, что сумма напряжений на верхних резисторах постоянна – 5 баллов.

Записано соотношение $I_1 = I_2 - I_A$ или эквивалентное – 5 баллов.

Использовано, что напряжения на верхнем и нижнем резисторах одинаковы – 5 баллов.

Найдено изменение тока через батарею – 10 баллов.