

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ И РАЗБАЛЛОВКИ

11 класс

1. (25 баллов) Тело бросили с земли под углом к горизонту так, что через половину времени полета оно оказалось на том же расстоянии от точки броска, что и в момент приземления. Под каким углом было брошено тело? Через какую часть времени полета тело еще раз оказывалось на том же расстоянии от точки броска?

Ответ. Угол броска определяется формулой $\sin \alpha = \sqrt{12/13}$ и примерно равен $\alpha \approx 74^\circ$. Через $\frac{3+\sqrt{33}}{12} \approx 0,73$ времени полета.

Решение. Обозначив начальную скорость тела через V_0 и угол броска через α , запишем горизонтальную (x) и вертикальную (y) координаты тела в произвольный момент времени t как

$$x = V_0 \cos \alpha t, \quad y = V_0 \sin \alpha t - gt^2/2,$$

а расстояние R от точки броска до тела как

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{V_0^2 t^2 - V_0 \sin \alpha g t^3 + g^2 t^4 / 4}.$$

Подставляя в данное выражение $t = t_{\pi}/2$, где $t_{\pi} = 2V_0 \sin \alpha / g$ – время полета, и приравнявая данное выражение к горизонтальной дальности полета $L = 2V_0^2 \sin \alpha \cos \alpha / g$, получаем формулу для угла броска

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{12}{13}},$$

откуда следует, что $\alpha \approx 74^\circ$.

Теперь найдем третий момент времени, когда $R(t) = L$. Для этого удобно использовать то обстоятельство, что $L = R(t_{\pi})$. Записывая условие $R(t) = R(t_{\pi})$, приходим к уравнению

$$g^2(t^4 - t_{\pi}^4) - 4V_0 \sin \alpha g(t^3 - t_{\pi}^3) + 4V_0^2(t^2 - t_{\pi}^2) = 0,$$

которое определяет все моменты времени, когда удаление тела от точки броска равно горизонтальной дальности полета. После сокращения на $t - t_{\pi}$ (корень $t = t_{\pi}$ нас не интересует) приходим к кубическому уравнению, которое можно привести к виду

$$t^3 - t_{\pi} t^2 + \operatorname{ctg}^2 \alpha t_{\pi}^2 t + \operatorname{ctg}^2 \alpha t_{\pi}^3 = 0.$$

Один из корней этого уравнения ($t = t_{\pi}/2$) известен. Чтобы найти остальные корни, поделим данный многочлен на $t - t_{\pi}/2$ и придем к квадратному уравнению

$$6t^2 - 3t_{\pi} t - t_{\pi}^2 = 0.$$

Записывая корни данного уравнения

$$t_{1,2} = t_{\pi} \frac{3 \pm \sqrt{33}}{12}$$

и отбрасывая отрицательный корень как нефизичный, окончательно получаем

$$t = t_{\pi} \frac{3 + \sqrt{33}}{12} \approx 0,73.$$

Разбалловка. Записана формула для удаления тела от точки броска – 5 баллов.

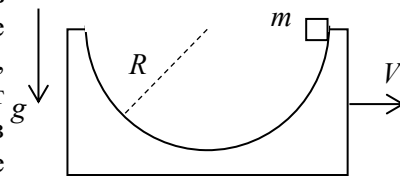
Найден угол броска – 5 баллов.

Получено кубическое уравнение для t – 5 баллов.

Получено квадратное уравнение для t – 5 баллов.

Найден третий момент времени – 5 баллов.

2. (25 баллов) Брусок с выемкой в виде полуцилиндра радиуса R двигают в горизонтальном направлении со скоростью V , удерживая в верхней точке выемки кубик массы m (см. рис.). В некоторый момент кубик освобождают, продолжая двигать брусок с прежней скоростью. Какую работу совершит над кубиком сила реакции бруска к моменту, когда кубик, скользя без трения по поверхности выемки, достигнет ее нижней точки? Ускорение свободного падения равно g .



Ответ. Сила реакции совершит работу, равную $-mV\sqrt{2gR}$.

Решение. Перейдем в инерциальную систему отсчета, движущуюся вместе с бруском. В этой системе отсчета сила реакции бруска работы не совершает (скорость кубика все время перпендикулярна силе реакции), поэтому механическая энергия кубика сохраняется. Обозначив скорость кубика в сопровождающей брусок системе отсчета в момент, когда кубик достигнет нижней точки, через v , запишем закон сохранения механической энергии в виде

$$\frac{mv^2}{2} = mgR,$$

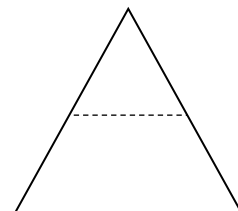
откуда получаем $v = \sqrt{2gR}$. Вернемся в неподвижную систему отсчета. В этой системе отсчета сила реакции работу совершает, и эта работа равна изменению механической энергии кубика, т.е.

$$A = \frac{m(V-v)^2}{2} - \left(\frac{mV^2}{2} + mgR \right) = -mVv = -mV\sqrt{2gR}.$$

Здесь учтено, что в нижней точке выемки скорость кубика равна по величине $|V - v|$.

Разбалловка. Найдена скорость кубика в нижней точке в движущейся системе отсчета – 5 баллов.
Записана скорость кубика в нижней точке в неподвижной системе отсчета – 5 баллов.
Работа записана через изменение механической энергии – 10 баллов.
Получен ответ – 5 баллов.

3. (25 баллов) По тонкой непроводящей пластинке в форме правильного треугольника равномерно распределен электрический заряд. Принимая потенциал на бесконечности равным нулю, найти, во сколько раз изменится потенциал в центре пластины, если четверть площади пластины в виде правильного треугольника (см. рис.) отрезать и удалить на бесконечность. *Указание.* Потенциал в центре заряженного треугольника пропорционален заряду треугольника и обратно пропорционален длине его стороны.



Ответ. Потенциал уменьшится в 1,2 раза.

Решение. Запишем потенциал в центре исходного треугольника в виде

$$\varphi_1 = \beta \frac{Q}{L},$$

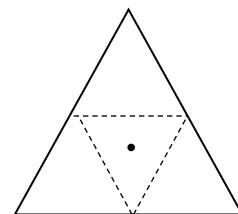
где Q – заряд исходной треугольной пластины, L – длина ее стороны, а β – коэффициент пропорциональности, о которой говорится в указании. По принципу суперпозиции этот же потенциал можно записать как сумму вкладов от четырех треугольников со стороной $L/2$, у одного из которых центр совпадает с центром исходного треугольника, а три остальных расположены на одинаковом удалении от этого центра (см. рис.). Обозначив вклад от одного из трех последних треугольников через φ_0 , запишем

$$\varphi_1 = \beta \frac{Q/4}{L/2} + 3\varphi_0.$$

Приравнявая записанные выражения для потенциалов, находим, что

$$\varphi_0 = \beta \frac{Q}{6L}.$$

После удаления части пластины потенциал в центре можно записать в виде



$$\varphi_2 = \beta \frac{Q/4}{L/2} + 2\varphi_0.$$

Подставляя в данную формулу найденное выражение для φ_0 , получаем

$$\varphi_2 = \beta \frac{Q/4}{L/2} + \beta \frac{Q}{3L} = \beta \frac{5Q}{6L}.$$

Окончательно, находим

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{5}{6}.$$

Разбалловка. Исходный треугольник разбит на 4 одинаковых треугольника – 5 баллов.

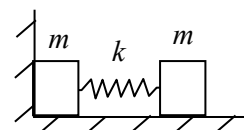
Записан потенциал в центре как сумма вкладов от 4 треугольников – 5 баллов.

Найден вклад φ_0 – 5 баллов.

Записан потенциал в центре как сумма вкладов от 3 треугольников – 5 баллов.

Получен ответ – 5 баллов.

4. (25 баллов) На гладкой горизонтальной плоскости находятся два бруска одинаковой массы m , соединенные пружиной жесткости k . Один из брусков касается вертикальной стенки (см. рис.). Другой брусок сдвинули к стенке на расстояние L и отпустили. Найти максимальное растяжение пружины. Через какое время оно будет достигнуто?



Ответ. Максимальное растяжение пружины равно $L/\sqrt{2}$. Оно будет достигнуто через

время $\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{2k}}.$

Решение. После того, как брусок отпустили, упругая сила сжатой пружины стала разгонять его в направлении от стенки. При этом находящийся у стенки брусок будет оставаться неподвижным до момента, пока пружина не достигнет недеформированного состояния и не начнет растягиваться. Таким образом, до этого момента в системе происходят колебания правого груза на пружине с угловой частотой $\omega_1 = \sqrt{k/m}$ и периодом $T_1 = 2\pi/\omega_1$. Пружина достигнет недеформированного состояния через четверть периода колебаний, т.е. через время

$$t_1 = \frac{T_1}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Скорость правого груза v_1 в момент достижения пружинной недеформированного состояния проще всего найти, записывая закон сохранения механической энергии в виде

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{kL^2}{2},$$

откуда получаем $v_1 = L\sqrt{k/m}$.

При дальнейшем движении скорость правого груза под действием растянутой пружины будет уменьшаться, а левого – увеличиваться. При этом из-за отсутствия контакта со стенкой в системе будет выполняться закон сохранения импульса. В момент, когда пружина достигнет максимального растяжения, скорости грузов станут одинаковыми и равными $v_1/2$. Обозначив максимальное растяжение пружины через x , запишем закон сохранения механической энергии в виде

$$\frac{kL^2}{2} = 2 \frac{m(v_1/2)^2}{2} + \frac{kx^2}{2},$$

откуда получаем $x = L/\sqrt{2}$.

После отрыва левого груза от стенки движение системы можно представить как суперпозицию равномерного поступательного движения со скоростью центра масс $v_1/2$ и колебаний грузов относительно центра масс (центра пружины) с угловой частотой $\omega_2 = \sqrt{2k/m}$ и периодом $T_2 = 2\pi/\omega_2$. При этом максимальное растяжение пружины достигается через время t_2 от момента отрыва, равное

$$t_2 = \frac{T_2}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

Таким образом, от начала движения до достижения максимального растяжения пружины проходит время

$$t_1 + t_2 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{2k}} .$$

Разбалловка. Найдено максимальное растяжение пружины – 10 баллов.

Найдено время t_2 – 10 баллов.

Найдено время $t_1 + t_2$ – 5 баллов.