

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ И РАЗБАЛЛОВКИ

8 класс

1. (25 баллов) После того, как на дно цилиндрического сосуда, заполненного водой до высоты 10 см, поставили куб с ребром 8 см, уровень воды в сосуде поднялся до 14 см. Каким станет уровень воды в сосуде, если на первый куб поставить такой же второй? Плотность материала кубов больше плотности воды.

Ответ. Уровень воды поднимется до 18 см.

Решение. Первый куб выдавил объем воды, равный произведению площади основания куба на его высоту (8 см). Эта вода расположилась над уровнем 10 см в виде цилиндра толщиной 4 см и площадью основания, равной площади дна цилиндра. Отсюда заключаем, что площадь дна цилиндра вдвое больше площади основания куба.

Второй куб выдавит объем воды, равный произведению площади основания куба на 6 см (толщину слоя воды над первым кубом). Часть этой воды займет объем между вторым кубом и стенками сосуда (толщина этого слоя будет 2 см), а часть расположится в виде цилиндра над уровнем 16 см (над верхней гранью второго куба). Толщина цилиндра будет также 2 см. Таким образом, уровень воды в сосуде поднимется до 18 см.

Разбалловка. Понято, что площадь дна вдвое больше площади основания куба – 10 баллов.

Понято, какой объем выдавит второй куб – 5 баллов.

Получен ответ – 10 баллов.

2. (25 баллов) 2026 одинаковых тел имеют температуры, отличающиеся на 1°C , температура самого холодного равна 1°C . Какой установится температура тел после приведения их всех в тепловой контакт между собой?

Ответ. Установится температура $1013,5^\circ\text{C}$.

Решение. Из закона сохранения энергии следует, что установившаяся в конце температура не будет зависеть от того, в каком порядке приводить тела в тепловой контакт. Разобьем все тела на 2 группы: первая – тела с температурами от 1°C до 1013°C , вторая – тела с температурами от 1014°C до 2026°C . Тела из первой и второй групп будем приводить в тепловой контакт попарно: тело с температурой 1°C – с телом с температурой 2026°C , тело с температурой 2°C – с телом с температурой 2025°C и т.д. В каждой паре в результате теплообмена установится одна и та же температура

$$\frac{1^\circ\text{C} + 2026^\circ\text{C}}{2} = \frac{2^\circ\text{C} + 2025^\circ\text{C}}{2} = \dots = 1013,5^\circ\text{C}.$$

Следовательно, после приведения всех пар в тепловой контакт между собой температура останется равной $1013,5^\circ\text{C}$.

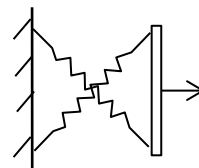
Разбалловка. Записано уравнение теплового баланса в каком-либо виде – 5 баллов.

Указан способ разбиения тел на группы – 10 баллов.

Найдена температура пар – 5 баллов.

Получен ответ – 5 баллов.

3. (25 баллов) Планка длиной 1 м прикреплена к стенке двумя недеформированными пружинами, являющимися диагоналями квадрата со стороной 1 м (см. рис.). Какую силу требуется приложить к планке, чтобы отодвинуть ее от стенки на 1 см? Жесткости пружин одинаковы и равны 100 Н/м . Пружины не касаются друг друга.



Ответ. Требуется приложить силу в 1 Н.

Решение. Обозначим сторону квадрата через a ($a = 1 \text{ м}$), длину недеформированной пружины через L ($L = a\sqrt{2}$), удлинение пружины через ΔL и смещение планки через x ($x = 1 \text{ см}$). Чтобы найти удлинение пружины ΔL , рассмотрим прямоугольный треугольник, катетами которого являются планка и отрезок между концом планки и стенкой, а гипотенузой – растянутая пружина. По теореме Пифагора запишем

$$(L + \Delta L)^2 = a^2 + (a + x)^2,$$

откуда после возведения в квадрат и сокращений получаем

$$2L\Delta L + (\Delta L)^2 = 2ax + x^2.$$

Поделив данное соотношение на $2L$, приведем его к виду

$$\Delta L \left(1 + \frac{\Delta L}{2L}\right) = \frac{ax}{L} \left(1 + \frac{x}{2a}\right).$$

Учитывая, что вторые слагаемые в скобках малы по сравнению с единицей, например, $\frac{x}{2a} = 0,005$, отбросим эти слагаемые и получим

$$\Delta L = \frac{ax}{L} = \frac{x}{\sqrt{2}} \approx 0,7 \text{ см}$$

(отсюда видно, что $\frac{\Delta L}{2L}$ еще меньше, чем $\frac{x}{2a}$, и отбрасывание было проведено корректно).

По найденному ΔL находим упругую силу пружины $F_{\text{упр}} = k\Delta L$, где через k обозначена жесткость пружины ($k = 100 \text{ Н/м}$). Поскольку смещение планки $x = 1 \text{ см}$ мало по сравнению со стороной квадрата $a = 1 \text{ м}$, можно приближенно считать, что пружина по-прежнему составляет с планкой угол 45° . Тогда действующая на планку по направлению к стенке компонента силы упругости одной пружины равна

$$F_1 = \frac{k\Delta L}{\sqrt{2}} = \frac{kx}{2},$$

а полная сила со стороны двух пружин равна

$$F = 2F_1 = kx = 1 \text{ Н}.$$

Разбалловка. Составлено уравнение для нахождения удлинения пружины – 5 баллов.

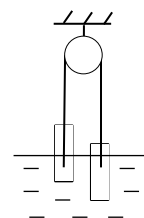
Найдено удлинение пружины – 5 баллов.

Записана сила упругости пружины по закону Гука – 5 баллов.

Найдена нужная компонента силы упругости одной пружины – 5 баллов.

Получен ответ – 5 баллов.

4. (25 баллов) На концах переброшенной через блок нити висят два цилиндра одинакового размера, частично погруженные в воду (см. рис.). Один цилиндр сделан из льда с плотностью 900 кг/м^3 и погружен в воду наполовину, второй – из пластика с плотностью 1300 кг/м^3 . На ледяной цилиндр нанесено теплоизолирующее покрытие так, что лед может получать тепло только через нижнее основание цилиндра и таять только снизу. Какая часть пластикового цилиндра погружена в воду? На какую часть своей длины переместится пластиковый цилиндр после того, как в результате таяния льда длина ледяного цилиндра уменьшится на 40%? В каком направлении переместится пластиковый цилиндр? Какая часть льда должна растаять, чтобы пластиковый цилиндр утонул? Считать, что вода находится в широком сосуде, так что ее уровень не меняется. Плотность воды равна 1000 кг/м^3 .



Ответ. Вначале пластиковый цилиндр погружен в воду на 0,9 (90%) своей длины. Пластиковый цилиндр сместится на 0,02 длины цилиндра вверх. Должно растаять $10/19 \approx 0,53$ ($\approx 53\%$) льда, чтобы пластиковый цилиндр начал тонуть. Он полностью утонет, когда растает $2/3 \approx 0,67$ ($\approx 67\%$) льда.

Решение. Учтем, что на каждый цилиндр со стороны нити действуют одинаковые силы, равные разности силы тяжести и силы Архимеда. Приравнявая эти разности для обоих цилиндров в начальном положении, приходим к соотношению

$$900 \cdot h - 1000 \cdot x_1 = 1300 \cdot h - 1000 \cdot x_2,$$

где через h обозначена длина цилиндра, а через x_1 и x_2 длины погруженных частей ледяного и пластикового цилиндров соответственно. Учтена также одинаковость поперечных сечений цилиндров. Из записанного соотношения с учетом того, что $x_1 = 0,5h$, находим

$$x_2 = x_1 + 0,4h = 0,9h,$$

т.е. пластиковый цилиндр погружен на 90%.

Рассмотрим теперь произвольный момент, к которому в результате таяния длина ледяного цилиндра уменьшилась на Δh , а цилиндры сместились на Δx – ледяной вниз, а пластиковый вверх. Записывая опять равенство действующих на цилиндры со стороны нити сил, приходим к соотношению

$$900 \cdot (h - \Delta h) - 1000 \cdot (0,5h - \Delta h + \Delta x) = 1300 \cdot h - 1000 \cdot (0,9h - \Delta x),$$

откуда следует, что $\Delta x = 0,05\Delta h$. При $\Delta h = 0,4h$ получаем, что $\Delta x = 0,02h$. Поскольку $\Delta x > 0$, то сделанное предположение о направлениях смещений цилиндров является верным.

Режим с постепенным подъемом пластикового цилиндра закончится в тот момент, когда вся оставшаяся часть ледяного цилиндра окажется над уровнем воды, т.е. при выполнении условия

$$0,5h - \Delta h + \Delta x = 0.$$

Подставляя сюда найденную связь $\Delta x = 0,05\Delta h$, получаем

$$\Delta h = \frac{10}{19}h \approx 0,53h.$$

При дальнейшем таянии льда пластиковый цилиндр начнет постепенно погружаться и окажется погруженным полностью в момент, когда будет выполнено условие

$$900 \cdot (h - \Delta h) = 1300 \cdot h - 1000 \cdot h,$$

т.е. при

$$\Delta h = \frac{2}{3}h \approx 0,67h.$$

Разбалловка. Найдена погруженная часть пластикового цилиндра – 5 баллов.

Найдена величина перемещения пластикового цилиндра – 5 баллов.

Найдено направление перемещения пластикового цилиндра – 5 баллов.

Найдено, какая часть льда должна растаять (10/19 или 2/3) – 10 баллов.