

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ И РАЗБАЛЛОВКИ

9 класс

1. (25 баллов) Брошенное в момент $t = 0$ под углом к горизонту тело оказалось в моменты t_1 и t_2 на расстояниях R_1 и R_2 от точки броска. Найти начальную скорость тела. Ускорение свободного падения равно g .

Ответ. Начальная скорость тела равна $\sqrt{\frac{R_1^2 t_2^3 - R_2^2 t_1^3}{t_1^2 t_2^2 (t_2 - t_1)} + \frac{g^2 t_1 t_2}{4}}$.

Решение. Обозначив начальную скорость тела через V_0 и угол броска через α , запишем горизонтальную (x) и вертикальную (y) координаты тела в произвольный момент времени t как

$$x = V_0 \cos \alpha t, \quad y = V_0 \sin \alpha t - gt^2/2,$$

а квадрат расстояния R^2 от точки броска до тела как

$$R^2 = x^2 + y^2 = V_0^2 t^2 - V_0 \sin \alpha gt^3 + g^2 t^4/4.$$

Подставляя в последнюю формулу значения $t_{1,2}$ и $R_{1,2}$, получаем два уравнения

$$R_1^2 = V_0^2 t_1^2 - V_0 \sin \alpha gt_1^3 + g^2 t_1^4/4, \quad R_2^2 = V_0^2 t_2^2 - V_0 \sin \alpha gt_2^3 + g^2 t_2^4/4,$$

из которых необходимо исключить неизвестный угол α . Для этого удобно поделить первое уравнение на t_1^3 , второе – на t_2^3 и вычесть одно получившееся уравнение из другого. В результате получим

$$\frac{R_1^2}{t_1^3} - \frac{R_2^2}{t_2^3} = V_0^2 \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} \right) + \frac{g^2(t_1 - t_2)}{4},$$

откуда и выражаем начальную скорость как

$$V_0 = \sqrt{\frac{R_1^2 t_2^3 - R_2^2 t_1^3}{t_1^2 t_2^2 (t_2 - t_1)} + \frac{g^2 t_1 t_2}{4}}.$$

Разбалловка. Записаны формулы для координат тела – 5 баллов.

Записана формула для расстояния – 5 баллов.

Составлено уравнение для нахождения V_0 (исключен угол броска) – 10 баллов.

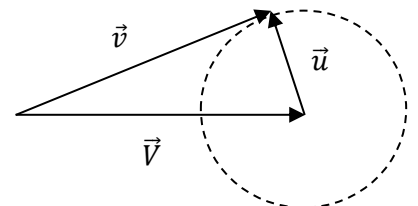
Найдена V_0 – 5 баллов.

2. (25 баллов) На ленте транспортера, движущейся со скоростью V , бегают по окружности со скоростью u ($u < V$) жучок. Рассматривая движение жучка относительно неподвижной системы отсчета, найти скорость жучка в моменты, когда его центростремительное ускорение минимально.

Ответ. Скорость жучка равна $\sqrt{V^2 - u^2}$.

Решение. В системе отсчета, связанной с лентой транспортера, ускорение жучка $\vec{a}$ является чисто центростремительным, т.е. направленным к центру окружности и перпендикулярным вектору скорости $\vec{u}$: $\vec{a} \perp \vec{u}$. Поскольку лента движется с постоянной скоростью, ускорение жучка в неподвижной системе отсчета такое же, как и в системе отсчета ленты. В неподвижной системе отсчета минимальное значение центростремительного ускорения равно нулю и достигается в те моменты, когда вектор ускорения $\vec{a}$ направлен вдоль вектора скорости жучка $\vec{v}$ в этой системе отсчета: $\vec{a} \parallel \vec{v}$.

Запишем формулу пересчета скорости жучка из одной системы отсчета в другую $\vec{v} = \vec{u} + \vec{V}$ и нарисуем соответствующий треугольник векторов (см. рис.). Движению жучка по окружности соответствует вращение вектора $\vec{u}$ на векторной диаграмме. В моменты, когда $\vec{v} \perp \vec{u}$ (см. рис.), выполняется условие $\vec{a} \parallel \vec{v}$, т.е. ускорение является чисто касательным (тангенциальным), а центростремительное ускорение равно нулю. В эти моменты



$$v = \sqrt{V^2 - u^2}.$$

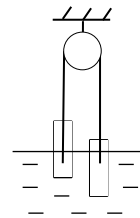
Разбалловка. Указано на инвариантность ускорения – 5 баллов.

Записана формула пересчета скорости – 5 баллов.

Понята перпендикулярность скоростей $\vec{v} \perp \vec{u}$ в нужные моменты – 5 баллов.

Найдена искомая скорость – 10 баллов.

3. (25 баллов) На концах переброшенной через блок нити висят два цилиндра одинакового размера, частично погруженные в воду (см. рис.). Один цилиндр сделан из льда с плотностью 900 кг/м^3 и погружен в воду наполовину, второй – из пластика с плотностью 1300 кг/м^3 . На ледяной цилиндр нанесено теплоизолирующее покрытие так, что лед может получать тепло только через нижнее основание цилиндра и таять только снизу. Какая часть пластикового цилиндра погружена в воду? На какую часть своей длины переместится пластиковый цилиндр после того, как в результате таяния льда длина ледяного цилиндра уменьшится на 40%? В каком направлении переместится пластиковый цилиндр? Какая часть льда должна растаять, чтобы пластиковый цилиндр утонул? Считать, что вода находится в широком сосуде, так что ее уровень не меняется. Плотность воды равна 1000 кг/м^3 .



Ответ. Вначале пластиковый цилиндр погружен в воду на 0,9 (90%) своей длины. Пластиковый цилиндр сместится на 0,02 длины цилиндра вверх. Должно растаять $10/19 \approx 0,53$ ($\approx 53\%$) льда, чтобы пластиковый цилиндр начал тонуть. Он полностью утонет, когда растает $2/3 \approx 0,67$ ($\approx 67\%$) льда.

Решение. Учтем, что на каждый цилиндр со стороны нити действуют одинаковые силы, равные разности силы тяжести и силы Архимеда. Приравнивая эти разности для обоих цилиндров в начальном положении, приходим к соотношению

$$900 \cdot h - 1000 \cdot x_1 = 1300 \cdot h - 1000 \cdot x_2,$$

где через h обозначена длина цилиндра, а через x_1 и x_2 длины погруженных частей ледяного и пластикового цилиндров соответственно. Учтена также одинаковость поперечных сечений цилиндров. Из записанного соотношения с учетом того, что $x_1 = 0,5h$, находим

$$x_2 = x_1 + 0,4h = 0,9h,$$

т.е. пластиковый цилиндр погружен на 90%.

Рассмотрим теперь произвольный момент, к которому в результате таяния длина ледяного цилиндра уменьшилась на Δh , а цилиндры сместились на Δx – ледяной вниз, а пластиковый вверх. Записывая опять равенство действующих на цилиндры со стороны нити сил, приходим к соотношению

$$900 \cdot (h - \Delta h) - 1000 \cdot (0,5h - \Delta h + \Delta x) = 1300 \cdot h - 1000 \cdot (0,9h - \Delta x),$$

откуда следует, что $\Delta x = 0,05\Delta h$. При $\Delta h = 0,4h$ получаем, что $\Delta x = 0,02h$. Поскольку $\Delta x > 0$, то сделанное предположение о направлениях смещений цилиндров является верным.

Режим с постепенным подъемом пластикового цилиндра закончится в тот момент, когда вся оставшаяся часть ледяного цилиндра окажется над уровнем воды, т.е. при выполнении условия

$$0,5h - \Delta h + \Delta x = 0.$$

Подставляя сюда найденную связь $\Delta x = 0,05\Delta h$, получаем

$$\Delta h = \frac{10}{19}h \approx 0,53h.$$

При дальнейшем таянии льда пластиковый цилиндр начнет постепенно погружаться и окажется погруженным полностью в момент, когда будет выполнено условие

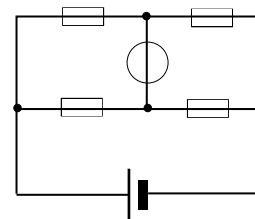
$$900 \cdot (h - \Delta h) = 1300 \cdot h - 1000 \cdot h,$$

т.е. при

$$\Delta h = \frac{2}{3}h \approx 0,67h.$$

Разбалловка. Найдена погруженная часть пластикового цилиндра – 5 баллов.
 Найдена величина перемещения пластикового цилиндра – 5 баллов.
 Найдено направление перемещения пластикового цилиндра – 5 баллов.
 Найдено, какая часть льда должна растаять (10/19 или 2/3) – 10 баллов.

4. (25 баллов) В представленной на рисунке цепи сопротивления резисторов в верхней ветви одинаковы и вдвое больше, чем сопротивления в нижней, сопротивление амперметра и внутреннее сопротивление батареи пренебрежимо малы. После того, как один из резисторов в нижней ветви заменили на другой – с неизвестным номиналом, амперметр стал показывать ток I_A . На сколько при этом изменился ток через батарею?



Ответ. Ток изменился на $3I_A/2$.

Решение. Обозначим сопротивления резисторов в верхней ветви через R , ток через эти резисторы в исходной цепи через I_0 , ток в левом верхнем резисторе после изменения цепи через I_1 , а в правом верхнем – через I_2 . Поскольку напряжение на последовательно включенных верхних резисторах остается неизменным (равным ЭДС батареи), можно записать равенство

$$I_0 R + I_0 R = I_1 R + I_2 R.$$

От того, какой именно из нижних резисторов заменили и увеличился или уменьшился номинал резистора, зависит только направление тока через амперметр и знак изменения тока через батарею. Для определенности будем считать, что заменили левый нижний резистор и его номинал уменьшился. В этом случае ток через амперметр потечет вверх, и можно написать соотношение

$$I_1 = I_2 - I_A.$$

Исключая из записанных соотношений ток I_1 , получаем

$$I_2 - I_0 = \frac{I_A}{2}.$$

Теперь заметим, что в силу пренебрежимо малого сопротивления амперметра напряжения на правом верхнем и правом нижнем резисторах одинаковы и в исходной цепи, и после ее изменения. Следовательно, ток через правый нижний резистор (имеющий сопротивление $R/2$) всегда вдвое больше тока через правый верхний резистор (имеющий сопротивление R). Ток через батарею равен сумме токов через правые резисторы и составляет $3I_0$ в исходной цепи и $3I_2$ после ее изменения. Изменение тока через батарею равно $\Delta I = 3I_2 - 3I_0$ и с учетом найденной ранее разности токов $I_2 - I_0$ выражается как

$$\Delta I = \frac{3I_A}{2}.$$

Возможна несколько иная форма записи решения, в которой токи до и после изменения цепи записываются через ЭДС батареи.

Разбалловка. Использовано, что сумма напряжений на верхних резисторах постоянна – 5 баллов.
 Записано соотношение $I_1 = I_2 - I_A$ или эквивалентное – 5 баллов.
 Использовано, что напряжения на верхнем и нижнем резисторах одинаковы – 5 баллов.
 Найдено изменение тока через батарею – 10 баллов.