

10 класс

1. (30 баллов) Брошенное с земли под углом α к горизонту тело через время t оказалось на расстоянии $gt^2/2$ от точки броска (g – ускорение свободного падения). С какой скоростью было брошено тело? При каком условии на угол α такая ситуация возможна?

Ответ. Начальная скорость тела равна $gt \sin \alpha$. Угол броска должен удовлетворять условию $\alpha \geq 45^\circ$.

Решение. Обозначив начальную скорость тела через V_0 , запишем горизонтальную (x) и вертикальную (y) координаты тела в момент времени t как

$$x = V_0 \cos \alpha t, \quad y = V_0 \sin \alpha t - gt^2/2.$$

Запишем квадрат расстояния тела от точки броска как

$$x^2 + y^2 = V_0^2 t^2 - V_0 \sin \alpha gt^3 + g^2 t^4/4.$$

Приравнявая данное выражение к $(gt^2/2)^2$, приходим к уравнению для V_0 вида

$$V_0^2 - g t \sin \alpha V_0 = 0.$$

Отбрасывая корень $V_0 = 0$, окончательно получаем

$$V_0 = g t \sin \alpha.$$

Далее учтем, что расстояние $gt^2/2$ должно достигаться при $y \geq 0$, т.е. при

$$V_0 \sin \alpha \geq gt/2.$$

Подставляя в данное неравенство найденное выражение для начальной скорости $V_0 = g t \sin \alpha$, приходим к условию

$$\sin^2 \alpha \geq 1/2,$$

т.е. $\alpha \geq 45^\circ$.

Разбалловка. Записаны формулы для координат тела – 5 баллов.

Записана формула для расстояния – 5 баллов.

Составлено уравнение для нахождения V_0 – 5 баллов.

Найдена V_0 – 5 баллов.

Найдено условие на угол α – 10 баллов.

2. (30 баллов) Прикрепленный нитью длины L к потолку шарик совершает вращательное движение в горизонтальной плоскости (см. рис.). Ускорение шарика равно по величине ускорению свободного падения g . Найти скорость шарика.

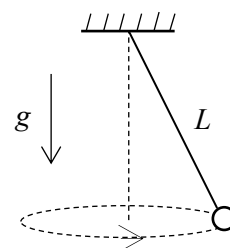
Ответ. Скорость шарика равна $\sqrt{gL/\sqrt{2}}$.

Решение. Равномерно двигаясь по окружности, шарик имеет только центростремительное ускорение. Обозначив искомую скорость шарика через V и угол между нитью и вертикалью через α , запишем радиус окружности как $L \sin \alpha$, а условие на величину ускорения как

$$\frac{V^2}{L \sin \alpha} = g.$$

Чтобы найти входящий в эту формулу угол α , запишем равенство вертикальной компоненты силы натяжения нити T силе тяжести mg (m – масса тела)

$$T \cos \alpha = mg,$$



а также второй закон Ньютона для шарика в проекции на центростремительное направление

$$mg = T \sin \alpha$$

(здесь учтено, что ускорение шарика равно g). Из двух последних соотношений получаем $\operatorname{tg} \alpha = 1$, т.е. $\alpha = 45^\circ$. Тогда из первой формулы находим окончательно

$$V = \sqrt{gL/\sqrt{2}}.$$

Разбалловка. Радиус окружности выражен через длину нити и угол – 5 баллов.

Записано условие на величину ускорения – 5 баллов.

Записан баланс сил в вертикальном направлении – 5 баллов.

Записан второй закон Ньютона в проекции на центростремительное направление – 5 баллов.

Найден угол α – 5 баллов.

Найдена скорость – 5 баллов.

3. (40 баллов) К батарее подключена цепь, состоящая из резисторов по 5 кОм и амперметра с пренебрежимо малым сопротивлением (см. рис.). После того, как параллельно одному из резисторов подключили вольтметр, амперметр стал показывать ток, составляющий 5% от тока через батарею. Найти сопротивление вольтметра.

Ответ. Сопротивление вольтметра равно 22,5 кОм.

Решение. Обозначим ток через батарею через I , тогда ток через амперметр равен $0,05I$. Поскольку правые на схеме резисторы фактически соединены параллельно друг другу (сопротивление амперметра пренебрежимо мало), то токи через них одинаковы и равны $0,5I$.

Левые участки схемы также включены параллельно друг другу, следовательно, напряжения на них одинаковы. Поскольку подключение вольтметра уменьшило сопротивление в нижней левой ветви, ток в этой ветви превышает ток в верхнем левом резисторе. Отсюда можно сделать вывод, что ток через амперметр ($0,05I$) течет на схеме вверх. Сложение этого тока с током через левый верхний резистор дает ток $0,5I$ в правом верхнем резисторе. Следовательно, ток через левый верхний резистор равен $0,45I$. Ток, проходящий через параллельно соединенные резистор и вольтметр, находится как сумма токов через правый нижний резистор ($0,5I$) и через амперметр ($0,05I$) и, следовательно, равен $0,55I$. Обозначив сопротивление резистора через R и сопротивление вольтметра через R_V , запишем условие равенства напряжений на верхней и нижней левых ветвях цепи как

$$0,45IR = 0,55I \frac{RR_V}{R + R_V}.$$

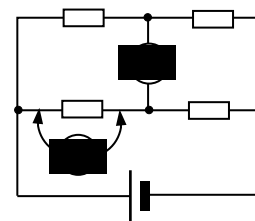
Из полученного уравнения находим, что $R_V = 4,5R = 22,5$ кОм.

Разбалловка. Понята одинаковость токов через правые резисторы – 10 баллов.

Понято направление тока через амперметр – 10 баллов.

Составлено уравнение равенства напряжений на левых резисторах – 10 баллов.

Найдено сопротивление вольтметра – 10 баллов.



ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ И РАЗБАЛЛОВКИ

10 класс

1. (30 баллов) Брошенное с земли под углом α к горизонту тело через время t оказалось на расстоянии gt^2 от точки броска (g – ускорение свободного падения). С какой скоростью было брошено тело? При каком условии на угол α такая ситуация возможна?

Ответ. Начальная скорость равна $V_0 = \frac{gt}{2}(\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + 3})$. Угол броска должен удовлетворять условию $\sin \alpha \geq 1/\sqrt{5}$.

Решение. Обозначив начальную скорость тела через V_0 , запишем горизонтальную (x) и вертикальную (y) координаты тела в момент времени t как

$$x = V_0 \cos \alpha t, \quad y = V_0 \sin \alpha t - gt^2/2.$$

Запишем квадрат расстояния тела от точки броска как

$$x^2 + y^2 = V_0^2 t^2 - V_0 \sin \alpha gt^3 + g^2 t^4/4.$$

Приравняв данное выражение к $(gt^2)^2$, приходим к квадратному уравнению для V_0 вида

$$4V_0^2 - 4gt \sin \alpha V_0 - 3g^2 t^2 = 0.$$

Записываем корни уравнения

$$V_0 = \frac{gt \sin \alpha}{2} \pm \frac{gt}{2} \sqrt{\sin^2 \alpha + 3}$$

и отбрасываем корень со знаком минус, поскольку он приводит к отрицательному значению начальной скорости. Окончательно получаем

$$V_0 = \frac{gt}{2} (\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + 3}).$$

Далее учтем, что расстояние gt^2 должно достигаться при $y \geq 0$, т.е. при

$$V_0 \sin \alpha \geq gt/2.$$

Подставляя в данное неравенство найденное выражение для начальной скорости, приходим к условию

$$(\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + 3}) \sin \alpha \geq 1,$$

откуда получаем

$$\sin \alpha \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$$

или примерно $\alpha \geq 26,57^\circ$.

Разбалловка. Записаны формулы для координат тела – 5 баллов.

Записана формула для расстояния – 5 баллов.

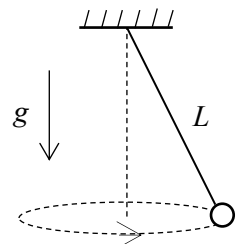
Составлено уравнение для нахождения V_0 – 5 баллов.

Найдена V_0 – 5 баллов.

Найдено условие на угол α – 10 баллов.

2. (30 баллов) Прикрепленный нитью длины L к потолку шарик совершает вращательное движение в горизонтальной плоскости (см. рис.). Ускорение шарика равно по величине ускорению свободного падения g . Найти скорость шарика.

Ответ. Скорость шарика равна $\sqrt{gL/\sqrt{2}}$.



Решение. Равномерно двигаясь по окружности, шарик имеет только центростремительное ускорение. Обозначив искомую скорость шарика через V и угол между нитью и вертикалью через α , запишем радиус окружности как $L \sin \alpha$, а условие на величину ускорения как

$$\frac{V^2}{L \sin \alpha} = g.$$

Чтобы найти входящий в эту формулу угол α , запишем равенство вертикальной компоненты силы натяжения нити T силе тяжести mg (m – масса тела)

$$T \cos \alpha = mg,$$

а также второй закон Ньютона для шарика в проекции на центростремительное направление

$$mg = T \sin \alpha$$

(здесь учтено, что ускорение шарика равно g). Из двух последних соотношений получаем $\operatorname{tg} \alpha = 1$, т.е. $\alpha = 45^\circ$. Тогда из первой формулы находим окончательно

$$V = \sqrt{gL/\sqrt{2}}.$$

Разбалловка. Радиус окружности выражен через длину нити и угол – 5 баллов.

Записано условие на величину ускорения – 5 баллов.

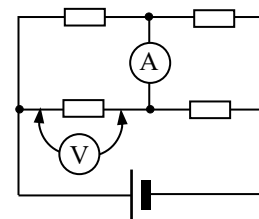
Записан баланс сил в вертикальном направлении – 5 баллов.

Записан второй закон Ньютона в проекции на центростремительное направление – 5 баллов.

Найден угол α – 5 баллов.

Найдена скорость – 5 баллов.

3. (40 баллов) К батарее подключена цепь, состоящая из резисторов по 2 кОм и амперметра с пренебрежимо малым сопротивлением (см. рис.). После того, как параллельно одному из резисторов подключили вольтметр, амперметр стал показывать ток, составляющий 1% от тока через батарею. Найти сопротивление вольтметра.



Ответ. Сопротивление вольтметра равно 49 кОм.

Решение. Обозначим ток через батарею через I , тогда ток через амперметр равен $0,05I$. Поскольку правые на схеме резисторы фактически соединены параллельно друг другу (сопротивление амперметра пренебрежимо мало), то токи через них одинаковы и равны $0,5I$.

Левые участки схемы также включены параллельно друг другу, следовательно, напряжения на них одинаковы. Поскольку подключение вольтметра уменьшило сопротивление в нижней левой ветви, ток в этой ветви превышает ток в верхнем левом резисторе. Отсюда можно сделать вывод, что ток через амперметр ($0,01I$) течет на схеме вверх. Сложение этого тока с током через левый верхний резистор дает ток $0,5I$ в правом верхнем резисторе. Следовательно, ток через левый верхний резистор равен $0,49I$. Ток, проходящий через параллельно соединенные резистор и вольтметр, находится как сумма токов через правый нижний резистор ($0,5I$) и через амперметр ($0,01I$) и, следовательно, равен $0,51I$. Обозначив сопротивление резистора через R и сопротивление вольтметра через R_V , запишем условие равенства напряжений на верхней и нижней левых ветвях цепи как

$$0,49IR = 0,51I \frac{RR_V}{R + R_V}.$$

Из полученного уравнения находим, что $R_V = 24,5R = 49$ кОм.

Разбалловка. Понята одинаковость токов через правые резисторы – 10 баллов.

Понято направление тока через амперметр – 10 баллов.

Составлено уравнение равенства напряжений на левых резисторах – 10 баллов.

Найдено сопротивление вольтметра – 10 баллов.