

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ И РАЗБАЛЛОВКИ

11 класс

1. (30 баллов) Брошенное с земли под углом α к горизонту тело через время t оказалось на расстоянии $gt^2/2$ от точки броска (g – ускорение свободного падения). С какой скоростью было брошено тело? При каком условии на угол α такая ситуация возможна?

Ответ. Начальная скорость тела равна $g t \sin \alpha$. Угол броска должен удовлетворять условию $\alpha \geq 45^\circ$.

Решение. Обозначив начальную скорость тела через V_0 , запишем горизонтальную (x) и вертикальную (y) координаты тела в момент времени t как

$$x = V_0 \cos \alpha t, \quad y = V_0 \sin \alpha t - gt^2/2.$$

Запишем квадрат расстояния тела от точки броска как

$$x^2 + y^2 = V_0^2 t^2 - V_0 \sin \alpha g t^3 + g^2 t^4 / 4.$$

Приравнявая данное выражение к $(gt^2/2)^2$, приходим к уравнению для V_0 вида

$$V_0^2 - g t \sin \alpha V_0 = 0.$$

Отбрасывая корень $V_0 = 0$, окончательно получаем

$$V_0 = g t \sin \alpha.$$

Далее учтем, что расстояние $gt^2/2$ должно достигаться при $y \geq 0$, т.е. при

$$V_0 \sin \alpha \geq gt/2.$$

Подставляя в данное неравенство найденное выражение для начальной скорости $V_0 = g t \sin \alpha$, приходим к условию

$$\sin^2 \alpha \geq 1/2,$$

т.е. $\alpha \geq 45^\circ$.

Разбалловка. Записаны формулы для координат тела – 5 баллов.

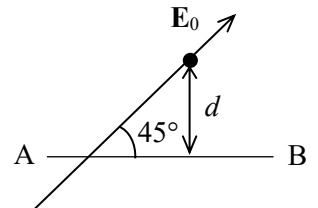
Записана формула для расстояния – 5 баллов.

Составлено уравнение для нахождения V_0 – 5 баллов.

Найдена V_0 – 5 баллов.

Найдено условие на угол α – 10 баллов.

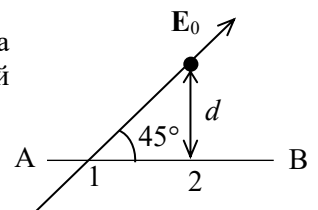
2. (30 баллов) Точечный заряд находится в однородном электрическом поле напряженностью E_0 на расстоянии d от прямой АВ, составляющей угол 45° с направлением электрического поля (см. рис.). Напряженность полного электрического поля равна нулю в точке пересечения прямой АВ с силовой линией однородного поля, проходящей через заряд. Найти разность потенциалов между этой точкой и ближайшей к заряду точкой прямой АВ.



Ответ. Разность потенциалов равна $\frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} d E_0$.

Решение. Обозначив величину точечного заряда через q , запишем условие равенства нулю напряженности полного поля в точке пересечения прямой АВ с силовой линией однородного поля (точка 1 на рис.) в виде

$$\frac{kq}{(d\sqrt{2})^2} = E_0,$$



где $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$, ϵ_0 – электрическая постоянная и учтено, что расстояние от точечного заряда до точки 1 равно $d\sqrt{2}$. Отсюда выражаем $kq = 2d^2 E_0$.

Согласно принципу суперпозиции разность потенциалов между точками 1 и 2 (см. рис.) можно находить как сумму вкладов от точечного заряда и от поля E_0 . Вклад в разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ от точечного заряда записываем, используя формулу для потенциала точечного заряда $\varphi = kq/r$ (r – расстояние от заряда) и найденное выше выражение для kq , как

$$\frac{kq}{d\sqrt{2}} - \frac{kq}{d} = (\sqrt{2} - 2)dE_0.$$

Чтобы найти вклад в разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ от однородного поля, нужно умножить расстояние между точками 1 и 2 (равное d) на проекцию поля E_0 на прямую АВ (равную $E_0/\sqrt{2}$). При этом получаем $dE_0/\sqrt{2}$.

Суммируя оба найденных вклада, окончательно находим

$$\varphi_1 - \varphi_2 = (\sqrt{2} - 2)dE_0 + dE_0/\sqrt{2} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} dE_0.$$

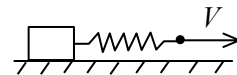
Разбалловка. Величина заряда выражена через E_0 – 5 баллов.

Найден вклад в разность потенциалов от точечного заряда – 10 баллов.

Найден вклад от однородного поля – 10 баллов.

Получен ответ – 5 баллов.

3. (40 баллов) Находящийся на гладком горизонтальном столе груз прикреплен к концу пружины, другой конец которой перемещают с постоянной скоростью V вдоль стола (см. рис.). Груз совершает колебания, и в течение трети периода колебаний его скорость относительно стола направлена противоположно скорости равномерного движения конца пружины. Найти максимальное значение скорости груза относительно стола.



Ответ. Максимальное значение скорости груза равно $3V$.

Решение. Выберем ось x , которая связана со столом и направлена в сторону равномерного движения конца пружины. Запишем зависимость от времени t координаты груза в виде

$$x = Vt + A \cos \omega t,$$

где через ω обозначена угловая частота колебаний, а через A – амплитуда колебаний. Тогда проекцию скорости груза на ось x следует записать в виде

$$v_x = V - \omega A \sin \omega t.$$

Полученное выражение должно оставаться отрицательным в течение трети периода изменения синуса, равного $T = 2\pi/\omega$. За время $\Delta t = T/3$ аргумент синуса (фаза колебаний) меняется на величину

$$\omega \Delta t = \omega \frac{T}{3} = \frac{2\pi}{3},$$

причем этот интервал изменения аргумента (фазы) должен располагаться симметрично относительно значения $\omega t = \pi/2$, при котором синус имеет максимум. Отсюда находим, что аргумент ωt меняется от $\omega t = \pi/6$ до $\omega t = 5\pi/6$. Поскольку при этих значениях $\sin \omega t = 1/2$, то из условия

$$v_x = V - \omega A \sin \omega t = 0$$

получаем амплитуду колебаний скорости груза $\omega A = 2V$. Максимальное значение скорости груза относительно стола достигается при значениях синуса, равных -1, и составляет $3V$.

Разбалловка. Записана зависимость от времени скорости груза – 10 баллов.

Найдено, что $\omega \Delta t = 2\pi/3$ – 5 баллов.

Найдены значения $\omega t = \pi/6$ и $5\pi/6$ (или эквивалентные) – 10 баллов.

Найдена амплитуда колебаний скорости груза – 10 баллов.

Найдена максимальная скорость – 5 баллов.

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ И РАЗБАЛЛОВКИ

11 класс

1. (30 баллов) Брошенное с земли под углом α к горизонту тело через время t оказалось на расстоянии gt^2 от точки броска (g – ускорение свободного падения). С какой скоростью было брошено тело? При каком условии на угол α такая скорость существует?

Ответ. Начальная скорость равна $V_0 = \frac{gt}{2}(\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + 3})$. Угол броска должен удовлетворять условию $\sin \alpha \geq 1/\sqrt{5}$.

Решение. Обозначив начальную скорость тела через V_0 , запишем горизонтальную (x) и вертикальную (y) координаты тела в момент времени t как

$$x = V_0 \cos \alpha t, \quad y = V_0 \sin \alpha t - gt^2/2.$$

Запишем квадрат расстояния тела от точки броска как

$$x^2 + y^2 = V_0^2 t^2 - V_0 \sin \alpha gt^3 + g^2 t^4/4.$$

Приравнявая данное выражение к $(gt^2)^2$, приходим к квадратному уравнению для V_0 вида

$$4V_0^2 - 4gt \sin \alpha V_0 - 3g^2 t^2 = 0.$$

Записываем корни уравнения

$$V_0 = \frac{gt \sin \alpha}{2} \pm \frac{gt}{2} \sqrt{\sin^2 \alpha + 3}$$

и отбрасываем корень со знаком минус, поскольку он приводит к отрицательному значению начальной скорости. Окончательно получаем

$$V_0 = \frac{gt}{2}(\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + 3}).$$

Далее учтем, что расстояние gt^2 должно достигаться при $y \geq 0$, т.е. при

$$V_0 \sin \alpha \geq gt/2.$$

Подставляя в данное неравенство найденное выражение для начальной скорости, приходим к условию

$$(\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + 3}) \sin \alpha \geq 1,$$

откуда получаем

$$\sin \alpha \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$$

или примерно $\alpha \geq 26,57^\circ$.

Разбалловка. Записаны формулы для координат тела – 5 баллов.

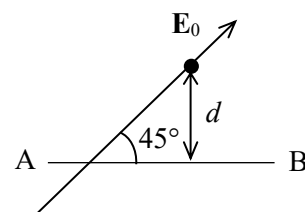
Записана формула для расстояния – 5 баллов.

Составлено уравнение для нахождения V_0 – 5 баллов.

Найдена V_0 – 5 баллов.

Найдено условие на угол α – 10 баллов.

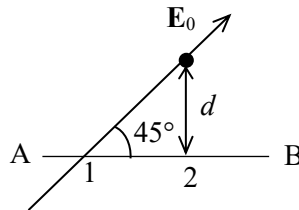
2. (30 баллов) Точечный заряд находится в однородном электрическом поле напряженностью E_0 на расстоянии d от прямой АВ, составляющей угол 45° с направлением электрического поля (см. рис.). Напряженность полного электрического поля равна $-E_0$ в точке пересечения прямой АВ с силовой линией однородного поля, проходящей через заряд. Найти разность потенциалов между этой точкой и ближайшей к заряду точкой прямой АВ.



Ответ. Разность потенциалов равна $\frac{5-4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} dE_0$.

Решение. Обозначив величину точечного заряда через q , запишем условие равенства $-E_0$ напряженности полного поля в точке пересечения прямой АВ с силовой линией однородного поля (точка 1 на рис.) в виде

$$\frac{kq}{(d\sqrt{2})^2} = 2E_0,$$



где $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$, ϵ_0 – электрическая постоянная и учтено, что расстояние от точечного заряда до точки 1 равно $d\sqrt{2}$. Отсюда выражаем $kq = 4d^2E_0$.

Согласно принципу суперпозиции разность потенциалов между точками 1 и 2 (см. рис.) можно находить как сумму вкладов от точечного заряда и от поля E_0 . Вклад в разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ от точечного заряда записываем, используя формулу для потенциала точечного заряда $\varphi = kq/r$ (r – расстояние от заряда) и найденное выше выражение для kq , как

$$\frac{kq}{d\sqrt{2}} - \frac{kq}{d} = 2(\sqrt{2} - 2)dE_0.$$

Чтобы найти вклад в разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ от однородного поля, нужно умножить расстояние между точками 1 и 2 (равное d) на проекцию поля E_0 на прямую АВ (равную $E_0/\sqrt{2}$). При этом получаем $dE_0/\sqrt{2}$.

Суммируя оба найденных вклада, окончательно находим

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2(\sqrt{2} - 2)dE_0 + dE_0/\sqrt{2} = \frac{5 - 4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} dE_0.$$

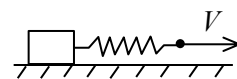
Разбалловка. Величина заряда выражена через E_0 – 5 баллов.

Найден вклад в разность потенциалов от точечного заряда – 10 баллов.

Найден вклад от однородного поля – 10 баллов.

Получен ответ – 5 баллов.

3. (40 баллов) Находящийся на гладком горизонтальном столе груз прикреплен к концу пружины, другой конец которой перемещают с постоянной скоростью V вдоль стола (см. рис.). Груз совершает колебания, и в течение одной шестой периода колебаний его скорость относительно стола направлена противоположно скорости равномерного движения конца пружины. Найти максимальное значение скорости груза относительно стола.



Ответ. Максимальное значение скорости груза равно $(1 + 2/\sqrt{3})V$.

Решение. Выберем ось x , которая связана со столом и направлена в сторону равномерного движения конца пружины. Запишем зависимость от времени t координаты груза в виде

$$x = Vt + A\cos\omega t,$$

где через ω обозначена угловая частота колебаний, а через A – амплитуда колебаний. Тогда проекцию скорости груза на ось x следует записать в виде

$$v_x = V - \omega A \sin\omega t.$$

Полученное выражение должно оставаться отрицательным в течение одной шестой периода изменения синуса, равного $T = 2\pi/\omega$. За время $\Delta t = T/6$ аргумент синуса (фаза колебаний) меняется на величину

$$\omega\Delta t = \omega \frac{T}{6} = \frac{\pi}{3},$$

причем этот интервал изменения аргумента (фазы) должен располагаться симметрично относительно значения $\omega t = \pi/2$, при котором синус имеет максимум. Отсюда находим, что аргумент ωt меняется от $\omega t = \pi/3$ до $\omega t = 2\pi/3$. Поскольку при этих значениях $\sin\omega t = \sqrt{3}/2$, то из условия

$$v_x = V - \omega A \sin\omega t = 0$$

получаем амплитуду колебаний скорости груза $\omega A = 2V/\sqrt{3}$. Максимальное значение скорости груза относительно стола достигается при значениях синуса, равных -1, и составляет $(1 + 2/\sqrt{3})V$.

Разбалловка. Записана зависимость от времени скорости груза – 10 баллов.

Найдено, что $\omega\Delta t = \pi/3$ – 5 баллов.

Найдены значения $\omega t = \pi/3$ и $2\pi/3$ (или эквивалентные) – 10 баллов.

Найдена амплитуда колебаний скорости груза – 10 баллов.

Найдена максимальная скорость – 5 баллов.