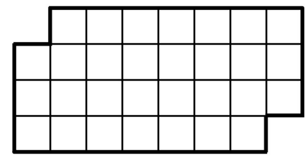
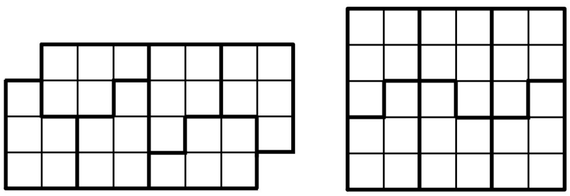
Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
Заключительный этап (решения/ответы)
2022–23 учебный год
6 класс

Задание 1. Разрежьте фигуру на рисунке по линиям сетки на шесть равных клетчатых частей и затем сложите из них прямоугольник 5×6. *Части называются равными, если их можно совместить наложением.* В решении необходимо привести две картинки — как разрезать и как сложить. (20 баллов)



Решение. Поскольку площадь каждой фигуры равна 30, каждая часть должна состоять из пяти клеток. Один из возможных примеров приведен на рисунке.



Критерии. Любой верный пример — 20 баллов.

Задание 2. Амир тяжелее Ильнура на 8 кг, а Данияр тяжелее Булата на 4 кг. Сумма весов самого тяжелого и легкого мальчиков на 2 кг меньше, чем сумма весов двоих остальных. Все четверо весят вместе 250 кг. Сколько килограммов весит Амир? (20 баллов)

Ответ. 66 кг.

Решение. Обозначим вес Булата в килограммах через x, вес Ильнура — через y. Тогда Амир весит $y + 8$, а Данияр — $x + 4$. Заметим, что самый тяжелый — Амир или Данияр, а самый легкий — Ильнур или Булат.

Если самый тяжелый — Данияр, то $x + 4 > y + 8$, поэтому $x > y$ и самый легкий — Ильнур. В этом случае вес самого тяжелого и самого легкого в сумме $x + 4 + y$, и он на 4 кг меньше суммарного веса двух оставшихся. Противоречие. Значит, самый тяжелый — Амир.

Пусть Булат — самый легкий. Тогда вместе с Амиром суммарно они весят $x + y + 8$, что на 4 кг больше чем двое других ребят. Противоречие.

Остается лишь случай, когда самый легкий — Ильнур. В таком случае Ильнур и Амир суммарно весят $2y + 8$. Из условия задачи следует, что тогда Булат и Данияр в сумме весят $2y + 10$. Следовательно, общий вес всех четверых ребят равен $4y + 18 = 250$, откуда $y = 58$. Поэтому Амир весит 66 кг.

Критерии. Только верный ответ при неверном или отсутствующем решении — 3 балла.

Пропущены случаи при переборе — не выше 10 баллов в зависимости от количества и тяжести пропущенных случаев.

В случае решения, как у жюри, пропуск любого из первых двух случаев (при верном в остальном решении) — 10 баллов; пропуск обоих первых случаев при верно разобранном третьем случае — 6 баллов.

Задание 3. Во время перемены один из пяти учеников написал на доске неверное равенство. На вопрос классного руководителя, кто это сделал, ученики дали следующие ответы.

Антон: «Это был Боря или Вова».

Боря: «Ни Дима, ни я этого не делали».

Вова: «Антон и Боря — оба лгут».

Гоша: «Среди Антона и Бори один лжет, а другой говорит правду».

Дима: «Гоша говорит неправду».

Классный руководитель знает, что трое из них всегда говорят правду, а двое других всегда лгут. Кто написал неверное равенство? (20 баллов)

Ответ. Вова.

Решение. Заметим, что из двоих учеников — Гоши и Димы — кто-то один говорит правду, а другой — лжет. Если Вова говорит правду, то уже трое детей лгут — Антон, Боря и кто-то один из Гоши и Димы. Но лгущих детей по условию двое, следовательно, Вова лжет.

В таком случае уже есть двое лгущих — Вова и кто-то один из Гоши и Димы. Поэтому Антон и Боря точно говорят правду. Тогда Гоша лжет, а, следовательно, Дима говорит правду. Мы определили, кто есть кто.

Осталось понять, кто написал равенство. Боря говорит правду, что ни он, ни Дима этого не делали. А так как Антон говорит правду, то это сделал Вова.

Замечание. Вообще говоря, из того, что Вова лжет, не следует, что Антон и Боря оба говорят правду. Поэтому напрямую сделать такой вывод, не считая количество лжецов, нельзя.

Критерии. Только верный ответ (без доказательства или с полностью неверным рассуждением) — 2 балла.

Для всех детей определено, кем они являются — 12 баллов.

Частичные продвижения:

Замечено, что Гоша и Дима — рыцарь и лжец в каком-то порядке — 3 балла.

Доказано, что Вова лжет — еще 3 балла.

Доказано, что Антон и Боря оба говорят правду — еще 3 балла.

Если не про всех детей доказано, кто кем является, но при этом указан верный ответ на этот вопрос и потом верно определено, кто из детей написал на доске — еще 3 балла к критериям за частичные продвижения. Все баллы последних четырех критериев суммируются.

Задание 4. Назовем натуральное число *интересным*, если оно представляется как в виде суммы двух последовательных целых чисел, так и в виде суммы трех последовательных целых чисел. Коля перемножил пять различных натуральных чисел. Оказалось, что результат — интересное число. Докажите, что хотя бы один из множителей тоже был интересным числом. (20 баллов)

Решение. Заметим, что сумма двух последовательных натуральных чисел нечетна (так как это сумма $k + (k + 1) = 2k + 1$). Кроме того, заметим, что сумма любых трех подряд идущих чисел делится на 3. Действительно, любые три подряд идущих числа можно представить в виде $n - 1$, n и $n + 1$, а их сумма равна $3n$. Таким образом, интересными являются в точности нечетные числа, кратные 3 (или числа вида $6k + 3$).

Поскольку произведение пяти Колиных чисел является интересным, то оно нечетно. Следовательно, **все** сомножители нечетны. Кроме того, это произведение делится на 3, поэтому хотя бы один из сомножителей должен делиться на 3. Так как он еще и нечетный, он и является интересным.

Критерии. Показано, что интересное число нечетно — 4 балла.

Показано, что интересное число кратно 3 — 4 балла. Эти критерии суммируются.

Задание 5. Тимофей положил на клетчатое поле 10 клетчатых прямоугольников, площади которых равны 1, 2, 3, $\ldots$, 10 соответственно. Некоторые прямоугольники перекрывались друг с другом (возможно, полностью, а возможно, только частично). После этого он заметил, что имеется ровно одна клетка, покрытая ровно один раз; имеется ровно две клетки, покрытые ровно два раза; имеется ровно три клетки, покрытые ровно три раза и ровно четыре клетки, покрытые ровно четыре раза. Какое наибольшее количество клеток, покрытых хотя бы пять раз, могло найтись? Площадь клетчатого прямоугольника — это количество клеток, которые он содержит. Каждый прямоугольник лежит на поле ровно по клеточкам. (20 баллов)

Ответ. 5 клеток.

Решение. *Оценка.* Всего имеется $1 + 2 + \ldots + 10 = 55$ покрытий клеток. Десять клеток, описанных в условии, покрыты в сумме в точности $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 30$ раз. Остается еще $55 - 30 = 25$ покрытий клеток. Следовательно, клеток, покрытых хотя бы пять раз, не более, чем $25/5 = 5$.

Пример. Будем считать, что все прямоугольники имеют вид $1 \times n$. Сложим из них прямоугольники площади $15 = 3 + 4 + 8$, $14 = 1 + 6 + 7$ и $12 = 2 + 10$. Еще осталось два прямоугольника площади 5 и 9. Наложим все пять прямоугольников друг на друга так, чтобы у них совпадали крайние левые клетки. Нетрудно проверить, что пример подходит.

Критерии. Только пример — 10 баллов.

Только оценка — 10 баллов.