

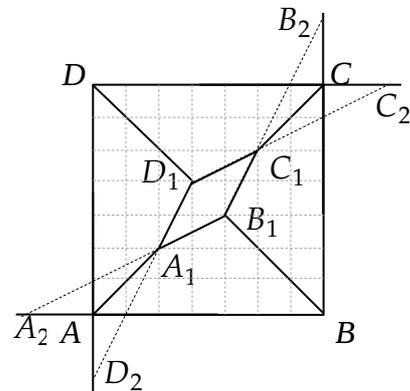
**Межрегиональные предметные олимпиады КФУ**  
**профиль «Математика»**  
**заключительный этап**  
**2022/23 учебный год**  
**11 класс**

**Задание 1.** У Маши есть копилка, куда она каждую неделю кладет купюру в 50 или 100 рублей. В конце каждых 4 недель она выбирает из копилки купюру наименьшего достоинства и дарит сестренке. Через год оказалось, что сестренке она отдала 1250 рублей. Какое минимальное количество денег могло накопиться за это время у нее самой?

**Задание 2.** а) Может ли для некоторых  $a, b$  оказаться, что  $\log_2 a \cdot \log_2 b = \log_2 ab$ ?  
 б) Может ли для некоторых  $a, b$  оказаться, что  $\log_2 a + \log_2 b = \log_2(a + b)$ ?  
 в) Могут ли при каких-то  $a, b$  выполняться оба равенства?

**Задание 3.** Обозначим  $\min \frac{x-1}{x^2+1} = a$ ;  $\max \frac{x-1}{x^2+1} = b$ . Чему равны минимум и максимум функций  
 а)  $\frac{x^3-1}{x^6+1}$ ; б)  $\frac{x+1}{x^2+1}$ ?

**Задание 4.** Многогранник  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  изображен в ортогональной проекции на плоскость  $ABCD$ . Докажите, что такой многогранник невозможен.



**Задание 5.** Рассмотрим алгебраическое выражение  $F(a, \dots, x)$ , содержащее переменные, скобки и операции умножения и вычитания. Числовые константы не используются. Заменим один из знаков операции на  $\perp$ , другой – на  $\bowtie$ . Назовем полученное выражение «формулой». Например, формулой будет выражение  $(a \bowtie b) \perp c$ , причем один из знаков обозначает разность, а другой – умножение.

а) существует ли формула, которая при любых значениях переменных (и любом из смыслов знаков) дает значение 0?

б) существует ли формула, которая при любых значениях переменных дает значение 1?