Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
заключительный этап (решения/ответы)
2023/24 учебный год

11 класс

Задание 1.

Найти трехзначное число, которое в 9-ричной системе счисления записывается теми же цифрами, но в обратном порядке.

Ответ: 445.

Решение. Пусть искомое число записано цифрами a, b, c, то есть $n = \overline{abc} = 100a + 10b + c$, запишем условие задачи:

$$100a + 10b + c = 81c + 9b + a; \;\; 99a + b - 80c = 0$$

Перепишем это равенство в виде: $100a - 80c = a - b$.

Левая часть делится на 10, значит $a - b$ также делится на 10. В силу того, что a и b – однозначные числа, эта разность может быть равна только 0, т.е. $b = a$. Подставив в полученное ранее равенство, получим $100a = 80c; \;\; 5a = 4c$.

Итак, возможен только один вариант: $c = 5; \; a = b = 4$.

Критерии оценивания:

- Приведен только ответ без пояснений – 2 балла.
- Приведен ответ и показано, что он удовлетворяет условию задачи – 5 баллов.
- Получено равенство $99a + b - 80c = 0$ или аналогичное ему – 5 баллов.
- Доказано (в том числе и перебором вариантов), что других решений нет – 10 баллов.
- Неполный перебор (остановлен при получении ответа) – 5 баллов.

Задание 2.

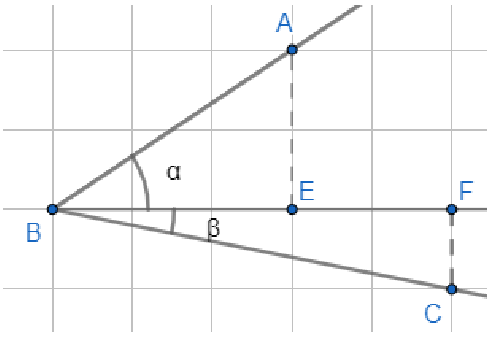
Точки A, B, C лежат в вершинах клеток клетчатой бумаги. Может ли угол ABC оказаться равным 30°?

Ответ: нет.

Решение. Проведем из точки B луч по линии сетки. Тогда угол ABC будет равен сумме углов α и β (они могут быть и отрицательными). Тангенс такого угла равен отношению двух целых чисел, то есть является рациональным числом. Тогда

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg(\alpha) + tg(\beta)}{1 - tg(\alpha)tg(\beta)}$$

также рациональное число. Но $tg(30°) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ – число иррациональное.



Если один из углов α и β является прямым, то можно использовать луч, идущий перпендикулярно первому.

Критерии оценивания:

- Приведен только ответ без пояснений – 0 баллов.
- Разобран частный случай, когда какие-то две точки лежат на одной горизонтали/вертикали – 3 балла.
- Сказано, что $tg(\alpha + \beta)$ является рациональным числом при условии рациональности $tg(\alpha)$ и $tg(\beta)$ без приведения соответствующей формулы – 10 баллов
- Каждая арифметическая ошибка в верном доказательстве (например, неверно указано значение $tg(30°)$ или перепутаны знаки в формуле для $tg(\alpha + \beta)$) – вычитается 3 балла.
- В равенстве $p = \sqrt{3}q$ для целых p, q не рассмотрен вариант $p = q = 0$ – вычитается 3 балла.

- Утверждение, что если $x^2 + y^2$ делится на 3, то x и y тоже делятся на 3 без обоснования/доказательства – 0 баллов.
- Доказано, что если $x^2 + y^2$ делится на 3, то x и y тоже делятся на 3, но при этом строго не обосновано что в разложении $x^2 + y^2$ на простые множители число 3 может входить только в четной степени – вычитается 3 балла.

Задание 3.

Выписаны 100 положительных чисел, сумма которых равна S, а сумма квадратов больше, чем P. Доказать, что среди этих чисел есть число, большее, чем P/S;

Решение. Расположим наши числа по убыванию, $x \geq y \geq z \geq \cdots$. Имеем

$$S = x + y + z + \cdots; x^2 + y^2 + z^2 + \cdots > P$$

Умножим первое равенство на x, получим, что

$$Sx = x^2 + xy + xz + \cdots \geq x^2 + y^2 + z^2 + \cdots > P$$

откуда $x > \frac{P}{S}$.

Критерии оценивания:

• Рассмотрен один или несколько частных случаев (например, когда все числа равны между собой или являются членами арифметической прогрессии) – 0 баллов.

• Рассмотрена задача для меньшего количества (например, двух или трех) чисел – 0 баллов.

Задание 4.

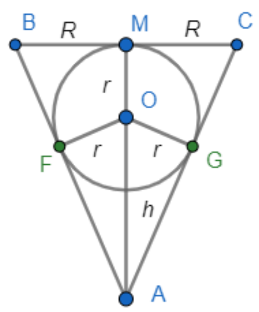
Коническое (пожарное) ведро было заполнено водой до самого края. В него положили шар, причем он полностью покрылся водой. Покажите, что при этом из ведра вылилось не более половины бывшей там воды.

Решение. Обозначим радиус шара через r, радиус основания конуса через R, а высоту конуса – через h. Тогда объём конуса равен $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h$; объём шара $v = \frac{4}{3}\pi r^3$. Отношение этих объемов равно

$$\frac{v}{V} = \frac{4r^3}{R^2 h}$$

Можно считать, что верхняя точка шара находится на поверхности воды, иначе воды выльется ещё меньше.

Из подобия прямоугольных треугольников AFO и AMB имеем $\frac{h-r}{r} = \frac{\sqrt{h^2+R^2}}{R}$. Возведем равенство в квадрат, получим



$$\left(\frac{h}{r} - 1\right)^2 = \frac{h^2 + R^2}{R^2} = 1 + \frac{h^2}{R^2}$$

$$1 - \frac{2h}{r} + \frac{h^2}{r^2} = 1 + \frac{h^2}{R^2}; \ \frac{h^2 - 2rh}{r^2} = \frac{h^2}{R^2}; \ R^2 = \frac{h^2 r^2}{h^2 - 2rh}$$

Значит, отношение объёмов равно

$$\frac{v}{V} = \frac{4r^3(h^2 - 2rh)}{h^2 r^2 h} = \frac{4r(h - 2r)}{h^2} = 4(t - 2t^2) = 4t(1 - 2t),$$

где $t = \frac{r}{h} < \frac{1}{2}$. Максимум этой функции достигается в вершине параболы, то есть при t = 1/4 и составляет $4t(1 - 2t) = 4 \cdot \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Заметим, что максимум достигается при h=4r; при этом

$$R^2 = \frac{16r^4}{16r^2 - 8r^2} = 2r^2; l^2 = h^2 + R^2 = 18r^2 = 9R^2; l = 3R$$

Критерии оценивания:

• Решение основано на неверном предположении, что соотношение объемов конуса и шара равно отношению площадей треугольника и вписанной окружности – 0 баллов.

• Получено соотношение между высотой конуса, радиусом основания конуса и радиусом вписанного шара – 4 балла.

• Отношение объемов записано в виде функции одной переменной – 4 балла.

Задание 5.

а) Существует ли функция $f(x)$, заданная на всей числовой оси такая, что $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2$?

б) Существует ли такая функция, заданная для $x>0$?

Ответ: а) нет; б) нет.

Решение. а) Подставим в равенство $x=2$, получим, что $f(1{,}5)=4$. При $x = -1/2$ получим $f(1{,}5)=1/4$. Противоречие. Функция не существует.

б) Приведенные в пункте а) рассуждения справедливы и для этого пункта, т.к. аргумент функции (1,5) положителен. Поэтому такая функция не существует и для положительных значений аргумента.

Критерии оценивания:

• Верные рассуждения в пункте а) – 5 баллов.

• Верные рассуждения в пункте б) – 15 баллов.

• Доказательство в пункте а), основанное на факте, что выражение $x-\frac{1}{x}$ не существует при $x=0$ является неверным, т.к. в условии говорится про аргумент функции, т.е. про выражение $x-\frac{1}{x}$, а не про переменную x. Выражение $x-\frac{1}{x}$ может принимать любые значение, в том числе и 0 (при $x=1$). Поэтому данное доказательство оценивается в 0 баллов.

• В пункте б) неверно истолковано условие задачи и рассмотрен вариант не для положительных значений аргумента функции (т.е. значений выражения $x-\frac{1}{x}$), а для положительных значений переменной x в равенстве $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2$. При этом получен ответ «да» и приведен вид данной функции:

$$f(x)=\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^2=\frac{x^2+x\sqrt{x^2+4}+2}{2}$$

Данное решение оценивается в 10 баллов.

• В пункте б) приведена функция

$$f(x)=\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^2=\frac{x^2+x\sqrt{x^2+4}+2}{2}$$

без строгих доказательств, например, не сказано, что квадратное уравнение $x^2-tx-1=0$ имеет ровно один положительный корень – 5 баллов.