

Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
Заключительный этап
2023–24 учебный год
5 класс

Решения задач и критерии оценивания

Задание 1. Расставьте числа от 1 до 8 (каждое — по одному разу) в прямоугольной таблице 2×4 так, чтобы сумма чисел в любой фигуре вида  была четной. Фигура может быть повернута и перевернута. (20 баллов)

Решение. Заметим, что если покрасить таблицу в шахматную раскраску, то каждая фигурка  будет содержать две белые и две черные клетки вне зависимости от своего положения. Поэтому достаточно расставить все нечетные числа на белые клетки, а все четные — на черные. Пример на рисунке.

1	4	5	8
2	3	6	7

Критерии. Любой верный пример — 20 баллов.

Задание 2. Папе Тимура 58 лет, а сестре Тимура — 25 лет. Мама старше Тимура на 22 года. Когда папа будет вдвое старше его сестры, Тимуру и его маме будет в сумме 100 лет. Сколько лет Тимуру сейчас? *Не забудьте объяснить свой ответ.* (20 баллов)

Ответ. 31.

Решение. Сначала выясним, через сколько лет папа станет вдвое старше сестры. Пусть это произойдет через x лет. Тогда $58 + x = 2(25 + x)$, или $58 + x = 50 + 2x$, откуда $x = 8$.

Пусть Тимуру сейчас t лет. Тогда маме сейчас $t + 22$ лет. Через 8 лет им вместе будет $(t + 8) + (t + 22 + 8) = 2t + 38$ лет. Получаем уравнение $2t + 38 = 100$, из которого следует, что $t = 31$.

Критерии. Только ответ с проверкой, что он подходит — 4 балла.

Только ответ без проверки, что он подходит — 2 балла.

Найдено, через сколько лет папа станет вдвое старше сестры — 5 баллов. Этот критерий суммируется с любым из предыдущих.

Задание 3. Четыре гномика — Фили, Кили, Ори и Дори — сидят за круглым столом. Каждому надели цветную шляпу одного из трёх цветов: красный, жёлтый и зелёный. Гномик видит шляпы трёх других гномиков, а свою не видит. Они сделали следующие утверждения: Фили: «У Кили и Ори не красная шляпа». Кили: «Я вижу три шляпы разных цветов». Ори: «Я не вижу зелёной шляпы». Дори: «Я вижу две шляпы одного цвета». Все утверждения правдивы. Определите цвета шляп на каждом гномике. *Не забудьте объяснить свой ответ.* (20 баллов)

Ответ. У Фили и Кили жёлтая шляпа, у Ори — зелёная, у Дори — красная.

Решение. Ори не видит зелёной шляпы, но из слов Кили следует, что она есть, так как Кили видит все три цвета. Следовательно, зелёная шляпа у Ори, и больше ни у кого зеленых шляп нет.

Дори видит две шляпы одного цвета. Они не могут быть красными, так как Фили видит, что у Кили и Ори не красная шляпа. Так же они не могут быть зелеными. Поэтому Дори видит две жёлтые шляпы, причем они могут быть только у Фили и Кили. Наконец, красный цвет остаётся только для шляпы Дори.

Критерии. Только ответ с проверкой, что он подходит — 5 баллов.

Доказано, что у Ори зеленая шляпа — 5 баллов.

Доказано, что у Фили и Кили желтые шляпы — 7 баллов.

Задание 4. Мышата, котята и щенята встали в круг. Когда дрессировщик попросил поднять лапку тех мышат, рядом с которыми стоит щенок, лапку подняли 20 зверят. А когда он попросил поднять лапку тех котят, рядом с которыми стоит щенок, лапку подняли 25 зверят. Докажите, что рядом с кем-то из поднимавших лапку стоят сразу двое щенят. (20 баллов)

Решение. Щенята образуют группы (возможно, некоторые из них состоят только из одного щенка), разделённые другими животными. Предположим, что между каждыми двумя соседними группами щенят стоят хотя бы двое других зверят. Тогда каждой группе соответствуют два животных (котенка или мышонка), соседних с этой группой и поэтому таких животных чётное число. Но именно эти зверята поднимали лапы, поэтому их в точности $20 + 25 = 45$. Получается противоречие.

Следовательно, какие-то две группы щенят разделены единственным другим животным. Он в любом случае поднимал лапу, и по каждую сторону от него стоит щенок.

Задание 5. В каждой ячейке квадратной коробки размера 6×6 лежит конфета ровно одного из трёх видов — сливочная, ореховая или шоколадная. Аня за ход может съесть ровно две конфеты одинакового вида в том случае, если они лежат в соседних по стороне или по диагонали ячейках. Какое наибольшее количество конфет Аня гарантированно сможет съесть из коробки независимо от их расположения? *Не забудьте объяснить свой ответ.* (20 баллов)

Ответ. 18.

Решение. *Оценка.* Разделим коробку на 9 квадратов 2×2 . В каждом из них четыре ячейки. Так как всего имеется три вида конфет, то как минимум какие-то две конфеты в этом квадрате — одинаковые. Но они в любом случае соседствуют по стороне или по диагонали, так что их точно можно съесть. Таким образом, в каждом из девяти квадратов можно съесть хотя бы две конфеты.

Пример. На рисунке приведен пример расположения конфет, для которого нельзя съесть больше 18 (виды конфет обозначены цифрами). В самом деле, при таком расположении невозможно съесть ни одну конфету второго или третьего видов, так как такие конфеты не соседствуют друг с другом. А конфет первого вида всего 18.

1	1	1	1	1	1
2	3	2	3	2	3
1	1	1	1	1	1
2	3	2	3	2	3
1	1	1	1	1	1
2	3	2	3	2	3

Критерии. Только оценка — 8 баллов.

Только пример — 8 баллов.