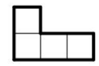
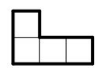
Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
Заключительный этап
2023–24 учебный год
8 класс
Решения задач и критерии оценивания

Задание 1. Можно ли расставить числа от 1 до 64 (каждое — по одному разу) в квадратную таблицу 8×8 так, чтобы сумма чисел в любой фигурке вида  была нечетной? Фигура может быть повернута и перевернута. *Не забудьте объяснить свой ответ.* (20 баллов)

Ответ. Да.

Решение. Заметим, что если покрасить строки с нечетными номерами с белый цвет, а строки с четными — в черный, то любая фигурка  будет содержать либо одну, либо три белых клетки. Поэтому достаточно расставить 32 нечетных числа в белые клетки, а 32 четных — в черные в любом порядке.

Критерии. Любой верный пример — *20 баллов.*

Задание 2. Двузначное число поделили на его сумму цифр. Результат оказался больше 2,6 и меньше 2,7. Найдите все такие двузначные числа. *Не забудьте объяснить свой ответ.* (20 баллов)

Ответ. Только 29.

Решение. Пусть исходное число это $\overline{ab} = 10a + b$. По условию,

$$2{,}6 < \frac{10a+b}{a+b} < 2{,}7,$$

или $2{,}6(a+b) < 10a + b < 2{,}7(a+b)$. Раскрыв скобки, получим $7{,}4a > 1{,}6b$ и $7{,}3a < 1{,}7b$. Отсюда следует, что $4\frac{5}{17}a < b < 4\frac{5}{8}a$.

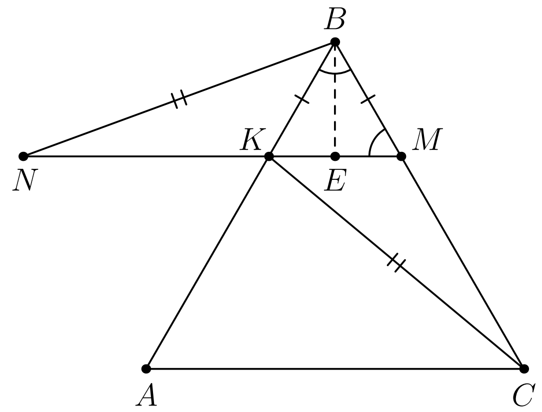
Поскольку $b \leqslant 9$, то $a = 1$ или $a = 2$, иначе первое неравенство не будет выполнено.

Если $a = 1$, то $4\frac{5}{17} < b < 4\frac{5}{8}$, что невозможно. Если же $a = 2$, то $8\frac{10}{17} < b < 9\frac{1}{4}$, откуда $b = 9$.

Критерии. Только ответ с проверкой — *4 балла.*

Задание 3. На стороне AB равностороннего треугольника ABC выбрана точка K. На прямой, проходящей через K параллельно стороне AC, нашлась точка N такая, что $BN = CK$, причем точки C и N лежат по разные стороны от прямой AB. Докажите, что $AK = KN$. (20 баллов)

Первое решение. Пусть прямая KN пересекает сторону BC в точке M. Отметим на луче KN точку P такую, что $KA = KP$. Заметим, что треугольник BKM — равносторонний, поэтому $MP = MK + KP = BK + KA = BA = BC$. Тогда треугольники BMP и KBC равны по двум сторонам и углу в $60°$ между ними. Отсюда $CK = BP$. Следовательно, точки N и P совпадают и $AK = NK$.



Второе решение. Четвертый (полу)признак равенства треугольников, примененный к треугольникам BMN и BKC, в которых $BM = BK$, $BN = CK$ и $\angle BMN = \angle KBC = 60°$ утверждает, что либо эти треугольники равны, либо сумма углов $\angle BNM + \angle BCK = 180°$. Второй случай невозможен. Действительно, $\angle BCK < 60°$ по условию. Кроме того, $\angle BNM < \angle BKM = 60°$, так как точка N лежит по разные стороны от прямой AB с точкой C. Это можно показать, например, так: пусть точка E — середина KM, тогда $BE \perp KM$. Точки E и C лежат по одну сторону от прямой AB, так как обе содержатся в треугольнике ABC. Следовательно, точка N на прямой KM лежит по ту же сторону от точки E, что и точка K, но дальше, чем точка K. Тогда $\angle BNM < \angle BKM$. Таким образом, сумма углов $\angle BNM + \angle BCK < 120°$.

Следовательно, $\triangle BMN = \triangle BKC$, откуда $MN = BC$. Но $MN = MK + KN = MB + KN$, а $BC = MB + CM$. Кроме того, заметим, что из того, что $KM \parallel AC$ следует, что $AK = CM$. Поэтому $AK = CM = KN$.

Четвёртый признак равенства треугольников. Пусть треугольники ABC и $A'B'C'$ таковы, что $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ и $\angle BAC = \angle B'A'C'$. Тогда либо $\angle BCA = \angle B'C'A'$ (и треугольники равны), либо $\angle BCA + \angle B'C'A' = 180°$.

Критерии. Верно сформулированный четвертый признак можно использовать без доказательства. Баллы за это не снижаются.

Задание 4. Несколько восьмиклассников сыграли 30 партий в настольный теннис (в каждой партии участвуют двое, ничьих не бывает). У них был только один стол, поэтому они установили такие правила: тот, кто выиграл очередную партию, пропускал не более трех следующих партий (возможно, вообще ни одной), а тот, кто проиграл, — более трёх следующих партий. Какое наименьшее число игроков могло быть в этой компании? *Необходимо не только объяснить, почему меньшее число невозможно, но и показать, как они могли осуществить задуманное.* (20 баллов)

Ответ. 6.

Решение. *Оценка.* Рассмотрим пятерых проигравших в первых пяти партиях и еще победителя пятой партии. Все эти люди, очевидно, различны: ведь чтобы проиграть и сыграть снова, нужно хотя бы 6 партий подряд. Поэтому, в компании хотя бы 6 человек.

Пример. Пронумеруем людей числами от 1 до 6. Пусть в каждой партии играл и выигрывал человек номер 6, а все остальные 5 человек участвовали в играх поочередно и все время проигрывали. Тогда условие, разумеется, выполняется: победитель игр не пропускал вовсе, а проигравшие пропускали ровно по 4 игры.

Критерии. Только оценка — *8 баллов.*
Только пример — *8 баллов.*

Задание 5. Действительные числа a и b (необязательно положительные) таковы, что

$$ab + \sqrt{ab+1} + \sqrt{a^2+b}\sqrt{a+b^2} = 0.$$

Чему может равняться значение выражения

$$b\sqrt{a^2+b} + a\sqrt{b^2+a}\,?$$

Укажите все ответы и объясните, почему других нет. (20 баллов)

Ответ. 1.

Решение. Перепишем равенство из условия в виде

$$ab + \sqrt{ab+1} = -\sqrt{a^2+b}\sqrt{a+b^2}$$

и возведем в квадрат. Получим

$$a^2b^2 + ab + 1 + 2ab\sqrt{ab+1} = (a^2+b)(a+b^2) = a^3 + b^3 + a^2b^2 + ab,$$

откуда

$$2ab\sqrt{ab+1} = a^3 + b^3 - 1. \qquad (*)$$

Обозначим $X = b\sqrt{a^2+b} + a\sqrt{b^2+a}$. Тогда

$$X^2 = b^2(a^2+b) + a^2(b^2+a) + 2ab\sqrt{a^2+b}\sqrt{a+b^2} =$$
$$= b^3 + a^3 + 2a^2b^2 + 2ab(-ab - \sqrt{ab+1}) = a^3 + b^3 - 2ab\sqrt{ab+1} = 1.$$

Здесь мы использовали данное в условии равенство и формулу $(*)$.

Таким образом, $X = \pm 1$. Покажем, что равенство $X = -1$ невозможно. Из условия следует, что $ab \geqslant -1$ (так как определен $\sqrt{ab+1}$). Кроме того, $ab = -\sqrt{ab+1} - \sqrt{a^2+b}\sqrt{a+b^2} \leqslant 0$. Таким образом, $-1 \leqslant ab \leqslant 0$. Это означает, что если числа a и b не равны нулю, то они разных знаков. Так как условие задачи симметрично по a и b, без ограничения общности можно считать, что $a \geqslant 0$, $b \leqslant 0$.

Предположим, что

$$b\sqrt{a^2+b} + a\sqrt{b^2+a} = -1,$$

тогда

$$1 + a\sqrt{b^2+a} = -b\sqrt{a^2+b}.$$

Возведем это равенство в квадрат и получим

$$1 + a^2(b^2 + a) + 2a\sqrt{b^2 + a} = b^2(a^2 + b),$$

откуда

$$b^3 - a^3 = 1 + 2a\sqrt{b^2 + a} \geqslant 1, \quad \text{так как } a \geqslant 0.$$

Но очевидно, что при $a \geqslant 0$, $b \leqslant 0$ выполнено неравенство $b^3 - a^3 \leqslant 0$. Противоречие.

Таким образом, единственная возможность — это $X = 1$.

Критерии. Доказано, что $X^2 = 1$ — *8 баллов.*