Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
заключительный этап (решения/ответы)
2023/24 учебный год

9 класс

Задание 1.

Рациональное число $0 < p < 1$ таково, что его десятичное представление является бесконечной десятичной дробью. В этой бесконечной десятичной дроби зачеркнули несколько (то есть конечное число) цифр. Доказать, что получившуюся после зачеркивания бесконечную десятичную дробь можно представить в виде обыкновенной дроби.

Решение. Рассмотрим последнюю зачеркнутую цифру, пусть она стоит на месте с номером n. Первые n цифр после запятой составляют число k, рассмотрим число $p - k \cdot 10^{-n}$, оно начинается с n нулей после запятой. После вычеркивания некоторого количества цифр вместо k получаем число l, в котором только $m < n$ цифр. Число p после вычеркивания станет равным

$$(p - k \cdot 10^{-n}) \cdot 10^{n-m} + l \cdot 10^{-m} = \frac{p \cdot 10^n - k + l}{10^m}$$

Это число – рациональное, то есть представляется как обыкновенная дробь.

2 способ – использовать то, что всякое рациональное число записывается периодической дробью. После вычеркивания конечного числа цифр после последней вычеркнутой цифры периодичность сохранится.

Критерии оценивания:

- Рассмотрен один или несколько примеров периодических дробей, например дробь 1/3=0.(3) – 0 баллов.
- Задача решена для случая, когда зачеркнутая цифра заменяется на “0” и не происходит сдвиг «хвоста» влево – не более 10 баллов.

Задание 2.

Компьютерная программа на входе получает набор натуральных чисел. Она вычисляет всевозможные (положительные) разности для пар заданных чисел. Если какой-то разности нет в списке, она её дописывает туда. И так до тех пор, пока не перестанут появляться новые числа. Получившийся список упорядочивается по возрастанию.

а) Закончится ли работа программы?

б) Докажите, что, если программа закончит работу, результат будет иметь вид арифметической прогрессии.

Ответ: а) да.

Решение. а) Пусть в первом списке максимальным числом было N. Тогда после работы программы добавятся числа, меньшие N. Значит, существует только конечное число новых значений, которые можно вписать в список. В какой-то момент они исчерпаются.

б) Рассмотрим наименьшее из оставшихся чисел, n. Если в окончательном списке есть число m, не кратное n, то с помощью алгоритма Евклида можно получить из m и n число НОД(n, m)<n, что противоречит минимальности n. Значит, все числа имеют вид kn, $k \in \mathbb{N}$. Могут ли числа k идти «не подряд»? Предположим, что в списке есть число kn, тогда в нем присутствует и разность $kn - n = (k - 1)n$ и т.д. до $1*n$. Значит, список имеет вид n, $2n$, …, pn, то есть является арифметической прогрессией с разностью n.

Критерии оценивания:

- Рассмотрен один или несколько примеров входных наборов чисел – 0 баллов.
- Объяснен пункт а) – 5 баллов.
- При решении пункта б) сказано, что шаг прогрессии n будет равен НОД исходного набора чисел – 5 баллов.
- При решении пункта б) показано, что любое число в полученном списке будет иметь вид kn – 5 баллов.

- При решении пункта б) показано, что в полученном списке числа вида *kn* идут подряд – 5 баллов.

Задание 3.

Турнир по крестикам-ноликам проводился по круговой системе, то есть каждый должен был сыграть по разу с каждым. Аделаида Ивановна и Людочка проиграли по нескольку игр, расстроились и ушли с турнира. Остальные участники доиграли до конца. Всего было сыграно 46 партий. Сколько игр сыграли Аделаида Ивановна и Люда на этом турнире?

Ответ: 10.

Решение. Пусть в турнире участвовало n игроков кроме А.И. и Л. Между собой они сыграли $\frac{n(n-1)}{2}$ игр, а во всем турнире должно было быть $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ игр. Значит,

$$\frac{n(n-1)}{2} \leq 46 \leq \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Из левого неравенства следует, что $n \leq 10$, из правого – что $n \geq 9$. Если $n = 10$, то остальные участники сыграли 45 игр, так что Аделаида Ивановна и Люда вместе сыграли только одну, что противоречит условию (они не могли обе проиграть в этой партии). Если же $n = 9$, то на их долю пришлось 46 – 9*8/2 = 10 игр.

Критерии оценивания:

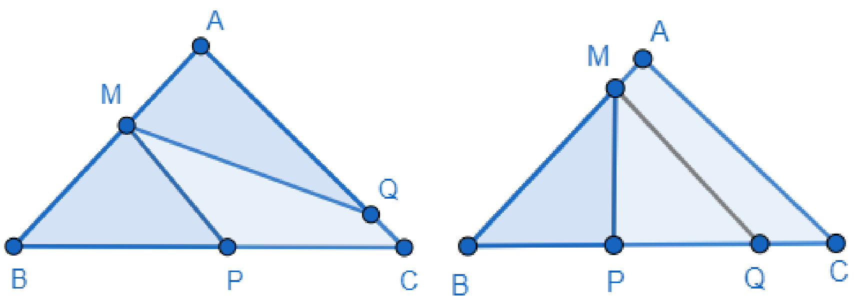
- Доказано, что $n \geq 9$ – 5 баллов.
- Доказано, что $n \leq 10$ – 5 баллов.
- Показано, что при $n = 10$ сыграна одна партия, что противоречит условию – 5 баллов.
- Показано, что вариант $n = 9$ подходит и получен верный ответ – 5 баллов.
- Задача решалась для варианта, когда А.И. и Л. сыграли одинаковое количество партий – вычитается 1 балл.
- В решении присутствует арифметическая ошибка, связанная с тем, что партия, которую должны были сыграть А.И. и Л. между собой посчитана дважды – вычитается 3 балла.

Задание 4.

В треугольнике *ABC* на стороне *AB* выберем точку *M* и проведем через нее две прямые, делящие треугольник на три части равной площади. Эти прямые пересекают контур треугольника в точках *P* и *Q*. При каком положении точки *M* площадь треугольника *MPQ* будет максимальной? Если таких положений несколько, укажите все.

Ответ: Когда *M* лежит в одной из крайних третей стороны *AB*.

Решение. Будем для определенности считать, что точка *M* лежит ближе к *A* чем к *B*. Возможны два варианта расположения точек *P* и *Q*. Если они лежат на разных сторонах треугольника, то площадь ΔMPQ меньше, чем площадь *MPCQ*, то есть меньше 1/3. Если же точки лежат на одной стороне, то площадь равна 1/3.



Осталось выяснить, при каком положении точки *M* реализуется второй случай. Пусть *BM* составляет долю *p* от *BA*, а *BP* – долю *q* от *BC*. Тогда площадь *MBP* составляет долю *pq* от площади всего треугольника. (Это можно показать, например, используя формулу $S = \frac{1}{2} BA \cdot BC \sin\beta$).

Значит, *pq*=1/3. С другой стороны, площади треугольников *MBP* и *MPQ* равны, и они имеют общую высоту, проведенную из точки *M*. Значит, и основания у них равны. Но тогда отрезок *BQ* составляет долю $2q$ от *BC*, то есть должно выполняться $2q \leq 1$. Но тогда $q \leq \frac{1}{2}; p = \frac{1}{3q} \geq \frac{2}{3}$.

Ясно, что аналогично рассматривается случай, когда M лежит ближе к B (а точки P, Q – на стороне AC). Итак, максимальная площадь треугольника MPQ достигается, если M лежит в одной из крайних третей стороны AB.

Критерии оценивания:

- Дан верный ответ без обоснований– 0 баллов.
- Сказано, что площадь будет максимальной, когда точка M совпадает с вершиной A или B – 0 баллов.
- Доказано, что площадь будет максимальной, когда точка M лежит на расстоянии 1/3 от вершины A или B – 2 балла.
- Сказано, что площадь будет максимальной, когда точка M располагается так, что точки P и Q находятся на одной стороне треугольника (или сказано, что площадь не будет максимальной, когда эти точки находятся на разных сторонах треугольника) без дальнейших продвижений в решении – 2 балла.
- В ответе указан только один из двух отрезков – вычитается 5 баллов.

Задание 5.

Задан полином $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Известно, что $P(a_0) = P(a_1) = \cdots = P(a_n)$. Докажите, что хотя бы два из коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_n$ совпадают.

Решение. Обозначим общее значение $P(a_i) = d$, тогда $a_0, a_1, \dots, a_n$ – корни многочлена $P(x) - d$. Но у многочлена степени n не более n корней, так что какие-то из (n+1) коэффициентов совпадают.

Критерии оценивания:

- Рассмотрен один или несколько примеров многочленов *P(x)* – 0 баллов.
- Задача решена только для полиномов первой или второй степени – 0 баллов.