**Межрегиональные предметные олимпиады КФУ**
**профиль «Математика»**
**Заключительный этап**
**2023 - 24 учебный год**
**9 класс**

**Задание 1.** Рациональное число $0 < p < 1$ таково, что его десятичное представление является бесконечной десятичной дробью. В этой бесконечной десятичной дроби зачеркнули несколько (то есть конечное число) цифр. Доказать, что получившуюся после зачеркивания бесконечную десятичную дробь можно представить в виде обыкновенной дроби. (20 баллов)

**Задание 2.** Компьютерная программа на входе получает набор натуральных чисел. Она вычисляет всевозможные (положительные) разности для пар заданных чисел. Если какой-то разности нет в списке, она её дописывает туда. И так до тех пор, пока не перестанут появляться новые числа. Получившийся список упорядочивается по возрастанию.
а) Закончится ли работа программы?
б) Докажите, что, если программа закончит работу, результат будет иметь вид арифметической прогрессии.
(20 баллов)

**Задание 3.** Турнир по крестикам-ноликам проводился по круговой системе, то есть каждый должен был сыграть по разу с каждым. Аделаида Ивановна и Людочка проиграли по нескольку игр, расстроились и ушли с турнира. Остальные участники доиграли до конца. Всего было сыграно 46 партий. Сколько игр сыграли Аделаида Ивановна и Люда на этом турнире?
(20 баллов)

**Задание 4.** В треугольнике $ABC$ на стороне $AB$ выберем точку $M$ и проведем через нее две прямые, делящие треугольник на три части равной площади. Эти прямые пересекают контур треугольника в точках $P$ и $Q$. При каком положении точки $M$ площадь треугольника $MPQ$ будет максимальной? Если таких положений несколько, укажите все. (20 баллов)

**Задание 5.** Задан полином $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Известно, что $P(a_0) = P(a_1) = \ldots = P(a_n)$. Докажите, что хотя бы два из коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n$ совпадают. (20 баллов)