

**Межрегиональные предметные олимпиады КФУ профиль «Математика»
заключительный этап (решения/ответы) 2024/25 учебный год
11 класс**

Задание 1 (20 баллов).

Решите уравнение $\arcsin(9x - 6) = \arccos(7x - 5)$.

Ответ: $x = \frac{10}{13}$.

Решение. Левая и правая часть – некий угол, пусть φ . Имеем $9x - 6 = \sin \varphi$; $7x - 5 = \cos \varphi$. По основному тригонометрическому тождеству $(9x - 6)^2 + (7x - 5)^2 = 1$. И наоборот, если выполняется это равенства, то числа $(9x - 6)$ и $(7x - 5)$ являются синусом и косинусом некоторого угла. Осталось проверить, что это именно угол φ .

Вообще говоря, тому же уравнению удовлетворяют синус и косинус углов $-\varphi$, $\varphi + \pi$, $\pi - \varphi$, у которых синусы и косинусы отличаются только знаком. Однако надо учесть, что арксинус и арккосинус принимают не произвольные значения. Как арккосинус, искомым угол лежит в пределах от 0 до π , как арксинус – в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Значит, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, что возможно, если $9x - 6 \geq 0$ и $7x - 5 \geq 0$. Итак, исходное уравнение равносильно системе соотношений

$$(9x - 6)^2 + (7x - 5)^2 = 1 \text{ и } 9x - 6 \geq 0; 7x - 5 \geq 0.$$

Решим квадратное уравнение:

$$130x^2 - 178x + 60 = 0; 65x^2 - 89x + 30 = 0; x = \frac{89 \pm \sqrt{89^2 - 4 \cdot 65 \cdot 30}}{130} = \frac{89 \pm 11}{130}$$

Корни уравнения: $\frac{10}{13}$ и 0,6. Второй из них – лишний, так как не удовлетворяет неравенствам.

Замечание. В этом задании проверять ОДЗ не нужно, так как условие $a^2 + b^2 = 1$ автоматически приводит к тому, что $|a| \leq 1$, $|b| \leq 1$. Если преобразования были неравносильными, необходимо проверить корни. Например, неравносильным является переход к уравнению

$$\sin(\arcsin(9x - 6)) = \sin(\arccos(7x - 5))$$

так как ему может соответствовать также соотношение

$$\arcsin(9x - 6) = \pi - \arccos(7x - 5)$$

Критерии оценивания: Полное решение – 20 баллов. Для решений через квадратное уравнение: правильно составленное и решенное квадратное уравнение – 10 баллов. Полная и правильная проверка корней – 10 баллов. В том числе, проверка корней подстановкой в исходное уравнение – 10 баллов. В противном случае за составление и проверку каждого из двух неравенств $9x - 6 \geq 0$; $7x - 5 \geq 0$ по 5 баллов. За неправильно решенное квадратное уравнение (и любую другую алгебраическую ошибку) снимается 5 баллов. За арифметическую ошибку – снимается 2 балла.

Задание 2 (20 баллов).

Пусть $a = \sqrt{0,99 \dots 99}$ (2024 девятки). Какова в этом числе: а) 2024-ая; б) 2025-ая цифра после запятой?

Ответ: а) 9; б) 4.

Решение. Если число меньше 1, то корень из него больше него самого, $a > 0,99 \dots 99$ то есть первые 2024 цифры числа a – девятки.

Обозначим для краткости единицу 2025-го разряда через t , $t = 10^{-2025}$. Пусть на 2025 месте стоит цифра d , она образует число $d \cdot 10^{-2025} = d \cdot t$. Сравним a с числами вида $b_d = 0,99 \dots 99 + d \cdot t = (1 - 10t) + dt = 1 - (10 - d)t$

Например, при $d=5$ имеем

$$b_5^2 = (1 - 5t)^2 = 1 - 10t + 25t^2 > 1 - 10t = a^2$$

Значит, $a < 1 - 5t$. Если же $d=4$, то

$$b_4^2 = (1 - 4t)^2 = 1 - 8t + 16t^2 < 1 - 10t + 16t^2 = a^2$$

так как $-2t + 16t^2 = -2t(1 - 8t) < 0$.

Итак, $b_4 < a < b_5$, то есть $0,99 \dots 994 < a < 0,99 \dots 995$, Значит, цифра на 2025 месте равна 4.

2 способ. Можно простым рассуждением найти гораздо больше цифр после запятой в числе a . Введем обозначения $0,99 \dots 99 = 1 - x$, $a = 1 - y$. тогда $x = 10^{-n}$, $n=2024$.

Как сказано ранее, $1 - y > 1 - x$, то есть $y < x$. Кроме того, $1 - x = (1 - y)^2 = 1 - 2y + y^2$, то есть $x = 2y - y^2 < 2y$. В силу малости числа y^2 можно ожидать, что y практически равно $x/2$. Действительно,

$$0 < y - \frac{x}{2} = \frac{y^2}{2} < \frac{x^2}{2}, \quad \text{то есть } \frac{x}{2} < y < \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}, \quad 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} < 1 - y < 1 - \frac{x}{2}$$

или

$$1 - 5 \cdot 10^{-(n+1)} - 5 \cdot 10^{-(2n+1)} < a < 1 - 5 \cdot 10^{-(n+1)}$$

То есть a отличается от 1 на 5 единиц 2025 разряда после запятой и ещё на не более, чем 5 единиц 4049-го разряда.

$$0, \underbrace{99 \dots 99}_{2024} 4 \underbrace{99 \dots 99}_{2023} 5 < a < 0, \underbrace{99 \dots 99}_{2024} 5$$

Замечание. Неверными являются рассуждения, использующее «последнюю цифру» числа a . Это число иррациональное, то есть представляется бесконечной непериодической десятичной дробью.

Критерии оценивания: За предъявление значений корня при малом числе девяток – 0 баллов. За верно решенный пункт (а) – 5 баллов. За доказанную оценку 2025-ой цифры сверху (или снизу) – плюс 5 баллов. Использование приближенного равенства без доказательных оценок – 0 баллов. Полное решение – 20 баллов.

Задание 3 (20 баллов).

Любочка: «Вы сказали, что квадратное уравнение, заданное на дом, имеет не только целые ненулевые коэффициенты, но и два целых корня, а у меня получается, что корней вообще нет». Учитель: «Перед x^2 был написан коэффициент, а ты его пропустила, записывая задание в тетрадь». Можно ли утверждать, что Любочка может однозначно исправить свою опisku на основе этой информации?

Ответ: Вообще говоря, нет.

Решение. Пусть Любочка записала уравнение $x^2 - 6x + 360 = 0$, которое не имеет корней. Но уравнения $-2x^2 - 6x + 360 = 0$ и $-3x^2 - 6x + 360 = 0$ имеют целочисленные корни. Действительно, первое приводится к виду $x^2 + 3x - 180 = 0$ с корнями 12 и -15, а второе – к виду $x^2 + 2x - 120 = 0$ или $(x + 1)^2 = 121$, корни 10 и -12. Любочка не может знать, какой из двух вариантов действительно был задан на дом.

Покажем, как можно составлять такие примеры. Пусть верное задание имело вид $ax^2 + bx + c = 0$. Попробуем подобрать b и c так, чтобы полученное уравнение имело целые корни более, чем при одном значении a .

По теореме Виета $b = -a(x_1 + x_2)$; $c = ax_1x_2$. Исключим неизвестное a из этой системы, поделив первое уравнение на второе. Это можно сделать, так как c не равно 0. Получаем равенство $-\frac{b}{c} = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1}$. Значит, надо подобрать две пары целых чисел $(x_1; x_2)$, для которых суммы обратных величин совпадают.

При этом надо учесть, что уравнение $x^2 + bx + c = 0$ не имеет корней. Это значит, что все значения левой части положительны и, в частности, значение при $x=0$: $c > 0$.

Имеем $ax^2 + bx + c = (x^2 + bx + c) + (a - 1)x^2$. При $x = x_1$ или $x = x_2$ эта сумма равна 0, в то время как первое слагаемое положительно. Значит, $a < 1$. В силу того, что a целое, а уравнение – квадратное, $a < 0$. Итак, c должно быть положительным, а a – отрицательным. Из соотношения $c = ax_1x_2$ следует, что корни имеют разный знак.

Например, $\frac{1}{2} + \frac{1}{-3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{-6} = \frac{1}{6}$. Подставляя пары корней (2; -3) и (3; -6) в теорему Виета, получим, что $b = -a_1 \cdot (-1) = -a_2 \cdot (-3)$; $c = a_1 \cdot (-6) = a_2 \cdot (-18)$. Следовательно,

$$b = a_1 = 3a_2, c = -6b$$

Можно выбрать, например, $a_2 = -1$, тогда $a_1 = -3$. Уравнение $x^2 - 3x + 18 = 0$ не имеет корней, а уравнения $-x^2 - 3x + 18 = 0$ и $-3x^2 - 3x + 18 = 0$ имеют по два целых корня.

Можно подобрать и другие примеры.

Критерии оценивания: Верный пример с двумя «исправленными» уравнениями считается полным решением. Указание на то, что a – общий делитель чисел b и c – плюс 3 балла. Доказанное

неравенство $a < 0$ – плюс 2 балла. Замечание: это неравенство нельзя доказать только с помощью свойств дискриминанта, без учета целочисленности a .

Задание 4 (20 баллов).

Через каждую из сторон равностороннего треугольника ABC со стороной 12 проведена плоскость, образующая угол 30° с плоскостью этого треугольника. Эти три плоскости пересекаются в точке D . Чему может быть равно расстояние от D до плоскости треугольника?

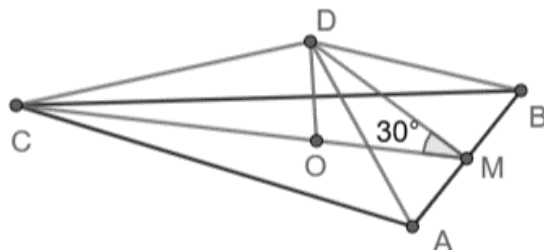
Ответ: 2 или 6.

Решение. Через каждую сторону треугольника можно провести две плоскости, образующие угол 30° с его плоскостью. Из трех плоскостей, указанных в условии, как минимум две будут отложены в одном «направлении», а третья – либо в том же, либо в противоположном. Значит, надо разобрать два случая.

Пусть O – проекция точки D на плоскость ABC , а α, β, γ – плоскости, проведенные в соответствии с условием через прямые BC , CA и AB соответственно. Будем считать, что α и β образуют с ABC угол 30° в одном и том же полупространстве. Легко видеть, что CO – биссектриса угла ACB . В силу правильности треугольника ABC она является и медианой, и высотой, то есть пересекает отрезок AB в его середине M .

1 случай. Плоскость γ отложена «в том же направлении». Тогда O является пересечением биссектрис, а, следовательно, и медиан треугольника ABC . Угол между плоскостями γ и ABC – это угол DMC . Значит,

$$OD = OM \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{OM}{\sqrt{3}} = \frac{CM}{3\sqrt{3}} = \frac{AC\sqrt{3}}{2 \cdot 3\sqrt{3}} = \frac{12}{6} = 2.$$



2 случай. Плоскость γ отложена «в противоположном направлении». Рассмотрим сечение всей конструкции плоскостью COD . Обозначим точку пересечения, полученную в предыдущем случае, через D_1 . Ясно, что точки D и D_1 лежат на одной прямой с точкой C (это прямая, по которой пересекаются плоскости α и β).

Пусть $O_1M = x$, $MO = kx$, тогда $CO_1 = 2x$.

В силу подобия прямоугольных треугольников MO_1D_1 и MDO имеем $\frac{DO}{D_1O_1} = \frac{MO}{MO_1} = k$. В силу подобия треугольников CO_1D_1 и CDO имеем $k = \frac{DO}{D_1O_1} = \frac{CO}{CO_1} = \frac{3x+kx}{2x} = \frac{k+3}{2}$. Из равенства $\frac{k+3}{2} = k$ следует, что $k = 3$. Итак, отрезок DO в 3 раза больше, чем отрезок D_1O_1 .

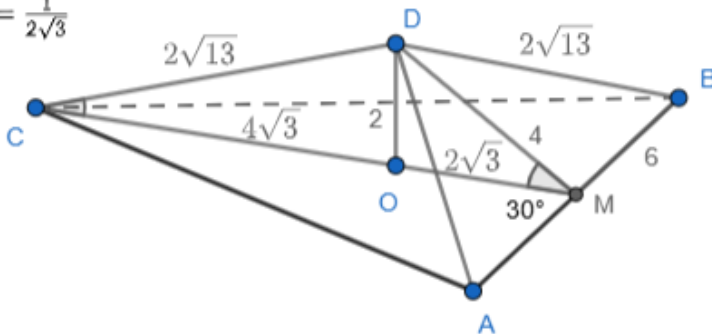
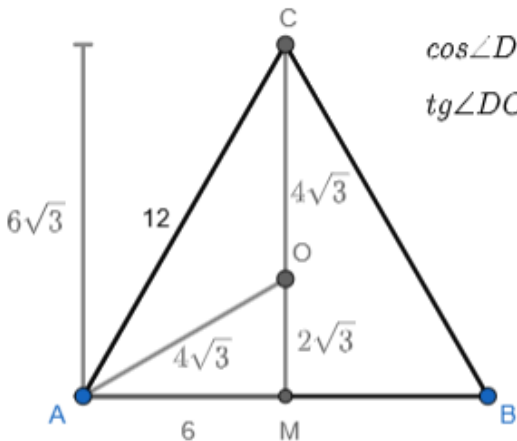
Критерии оценивания: Разбор первого случая – 5 баллов, второго – 15 баллов. Алгебраические, геометрические, тригонометрические ошибки – минус 5 баллов за каждую. Арифметические ошибки – минус 2 балла. Во втором случае использование без обоснования факта, что $ACBO$ – ромб – 0 баллов за второй случай.

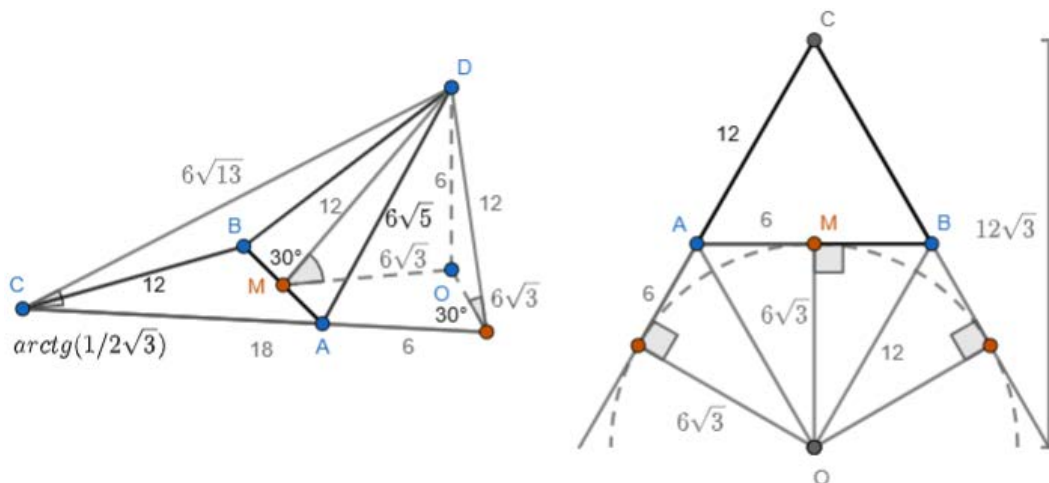
Для проверяющего: Правильные размеры промежуточных отрезков:

$$\sin \angle DCO = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

$$\cos \angle DCO = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$$

$$tg\angle DCO = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$





Задание 5 (20 баллов).

При каких значениях параметра a три различных параболы с уравнениями $y = ax^2 + x + 1$; $y = x^2 + ax + 1$; $y = x^2 + x + a$ имеют общую касательную? (Точки касания не обязаны совпадать)

Ответ. $a = 9$.

Решение. В силу того, что параболы различные, $a \neq 1$.

1 способ. Пусть касательная имеет уравнение $y = kx + t$. Прямая является касательной к параболе $y = ax^2 + bx + c$, если она пересекает график этой функции в одной точке, то есть уравнение $ax^2 + bx + c = kx + t$ имеет единственный корень. Это равносильно условию, что дискриминант этого уравнения равен 0: $(b - k)^2 - 4a(c - t) = 0$. Запишем это равенство для трех заданных парабол:

$$\begin{cases} (1 - k)^2 - 4a(1 - t) = 0 \\ (a - k)^2 - 4(1 - t) = 0 \\ (1 - k)^2 - 4(a - t) = 0 \end{cases}$$

Вычтем последнее уравнение из первого, получим $4(a - 1)t = 0$. Итак, $t = 0$ (так как $a \neq 1$) и система сводится к виду

$$\begin{cases} (a - k)^2 - 4 = 0 \\ (1 - k)^2 - 4a = 0 \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе, получим $(a - 1)(a + 1 - 2k) + 4(a - 1) = 0$. В силу того, что $a \neq 1$, получаем, что $k = \frac{a+5}{2}$, так что первое уравнение приобретает вид $\left(\frac{a-5}{2}\right)^2 = 4$, то есть $a - 5 = \pm 4$, откуда $a = 1$ или $a = 9$.

2 способ. Касательная к произвольной параболе $y = ax^2 + bx + c$ в точке x_0 имеет вид

$$y = (2ax_0 + b)(x - x_0) + ax_0^2 + bx_0 + c = (2ax_0 + b)x - ax_0^2 + c$$

Пусть общая касательная касается трёх заданных парабол в точках x_1, x_2, x_3 соответственно. Тогда ее угловой коэффициент равен

$$k = 2ax_1 + 1 = 2x_2 + a = 2x_3 + 1$$

А свободный член

$$t = -ax_1^2 + 1 = -x_2^2 + 1 = -x_3^2 + a$$

Получили систему 4 уравнений с 4 переменными. Первые два уравнения можно переписать в виде $x_3 = ax_1 = x_2 + \frac{a-1}{2}$. Используя первое из этих равенств исключим x_3 из системы, получим

$$\begin{cases} ax_1 = x_2 + \frac{a-1}{2} \\ -ax_1^2 + 1 = -x_2^2 + 1 \\ -ax_1^2 + 1 = -(ax_1)^2 + a \end{cases}$$

Из последнего уравнения $(a^2 - a)x_1^2 = a - 1$. Сократим на $a - 1 \neq 0$, получим $ax_1^2 = 1$, откуда $t=0$ и $x_2^2 = 1$. Проверим оба решения этого уравнения.

Пусть $x_2 = 1$, тогда $ax_1 = \frac{a+1}{2}$; $ax_1^2 = 1$. Следовательно,

$$a\left(\frac{a+1}{2a}\right)^2 = 1; (a+1)^2 = 4a; a^2 - 2a + 1 = 0; a = 1$$

Пусть $x_2 = -1$, тогда $ax_1 = \frac{a-3}{2}$; $ax_1^2 = 1$. Следовательно,

$$a\left(\frac{a-3}{2a}\right)^2 = 1; (a-3)^2 = 4a; a^2 - 10a + 9 = 0; a = 1 \text{ или } a = 9$$

Другой вариант решения: вторая группа равенств сводится к

$$\begin{cases} x_2^2 = ax_1^2 \\ x_3^2 = x_2^2 + a - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax_2^2 = (ax_1)^2 \\ a^2x_1^2 = x_2^2 + a - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax_2^2 = \left(x_2 + \frac{a-1}{2}\right)^2 \\ ax_2^2 = x_2^2 + a - 1 \end{cases}$$

Последнее равенство можно переписать в виде $(a-1)x_2^2 = a-1$, откуда в силу $a \neq 1$ имеем $x_2^2 = 1$. Тогда $x_2 = \pm 1$, и первое равенство принимает вид $a = \left(\pm 1 + \frac{a-1}{2}\right)^2 = 1 \pm (a-1) + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2$

Для $x_2 = 1$ получаем $\left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = 0$, откуда $a=1$, лишний корень. Для $x_2 = -1$ получаем $2(a-1) = \left(\frac{a-1}{2}\right)^2$, откуда с учетом $a \neq 1$ получаем $a-1 = 8, a = 9$.

Критерии оценивания: Описано в каком-то виде условие касания – 5 баллов. Составлена система уравнений – плюс 5 баллов. За правильное решение системы – 10 баллов. Ошибки в алгебраических преобразованиях – минус 5 баллов. Арифметические ошибки – минус 2 балла. Если в ответ включено значение $a = 1$, баллы не снижаются.

☐	$f(x) = 9x^2 + x + 1$	⋮
☐	$g(x) = x^2 + 9x + 1$	⋮
☐	$h(x) = x^2 + x + 9$	⋮
☒	$p(x) = 7x$	⋮
+	Ввод...	

