

Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
Заключительный этап
2024–25 учебный год
7 класс

Решения задач и критерии оценивания

Задание 1. Суммарный возраст дочери и двух сыновей Полины такой же, как и возраст самой Полины. Пройдет несколько лет и суммарный возраст уже только двух сыновей Полины будет равен её возрасту. Во сколько раз тогда повзрослеет дочка? *Не забудьте объяснить свой ответ.* (20 баллов)

Ответ. В два раза.

Решение. Предположим, что должно пройти x лет, чтобы суммарный возраст уже только двух сыновей Полины был равен её возрасту. Братья за это время повзрослеют на $2x$ лет в сумме, а дочка на x лет, и Полина — тоже на x лет.

Разница между возрастом Полины и суммой возрастов двух сыновей через x лет должна стать равной 0. Таким образом, сейчас эта разница должна быть ровно $2x - x = x$ лет. Но сейчас разница между возрастами Полины и двух сыновей — это в точности возраст дочери. Поэтому сейчас дочке x лет. Значит, через x лет она станет старше в два раза.

Критерии. Решение, основанное на конкретном примере возрастов всех участвующих людей — 5 баллов.

Задание 2. Программист Вася написал программу, которая считает среднее арифметическое всех введенных в компьютер чисел. Он по очереди вводит в компьютер натуральные числа и замечает, что среднее арифметическое всех введенных чисел возрастает на 3 после каждого следующего введенного числа. На сколько сотое введенное Васей число будет больше первого? *Не забудьте объяснить свой ответ.* (20 баллов)

Ответ. На 594.

Решение. Пусть Вася вводил числа $a_1, a_2, \dots, a_{99}, a_{100}$ в таком порядке. Обозначим $a_1 = x$. Оно же равно своему среднему арифметическому. Тогда среднее арифметическое чисел a_1 и a_2 должно быть равно $x + 3$, поэтому $a_2 = x + 6$.

Среднее арифметическое первых трех чисел должно быть равно $x + 6$. Но уже $a_2 = x + 6$, поэтому $a_3 = x + 12$.

Вообще, после ввода числа a_{k+1} среднее арифметическое должно равняться $x + 3k$. Покажем по индукции, что $a_{k+1} = x + 6k$. Для первых чисел это верно. Пусть это верно для чисел от a_1 до a_{n+1} . Тогда Вася вводил числа $x, x + 6, \dots, x + 6n$. После ввода числа a_{n+2} среднее арифметическое должно равняться $x + 3n + 3$. Но пары чисел a_2 и a_{n+1} , a_3 и $a_n, \dots$ уже имеют такое среднее. Поэтому должно быть $a_1 + a_{n+2} = 2x + 6n + 6$, откуда $a_{n+2} = x + 6(n + 1)$.

Отсюда следует, что $a_{100} = x + 6 \cdot 99 = a_1 + 594$.

Задание 3. Барон Мюнхгаузен хочет вырезать несколько клеток из квадрата 10×10 так, чтобы больше нельзя было вырезать ни одного квадрата 2×2 и ни одну *горизонтальную* полосу 1×4 (вертикальные полосы могут остаться). Какое наименьшее количество клеток потребуется вырезать барону для этого? Не забудьте объяснить свой ответ. (20 баллов)

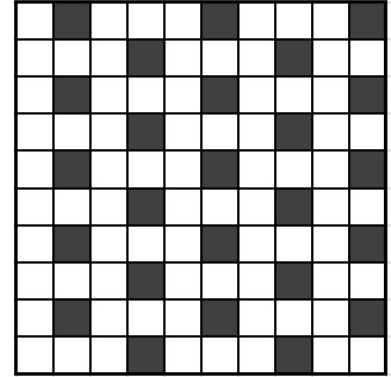
Ответ. 25.

Решение. *Оценка.* Квадрат 10×10 можно разбить на 25 непересекающихся квадратов 2×2 . В каждом таком квадрате необходимо вырезать хотя бы одну клетку. Поэтому вырезать нужно не менее 25 клеток.

Пример. С другой стороны, можно обойтись ровно 25 клетками, как показывает пример на рисунке.

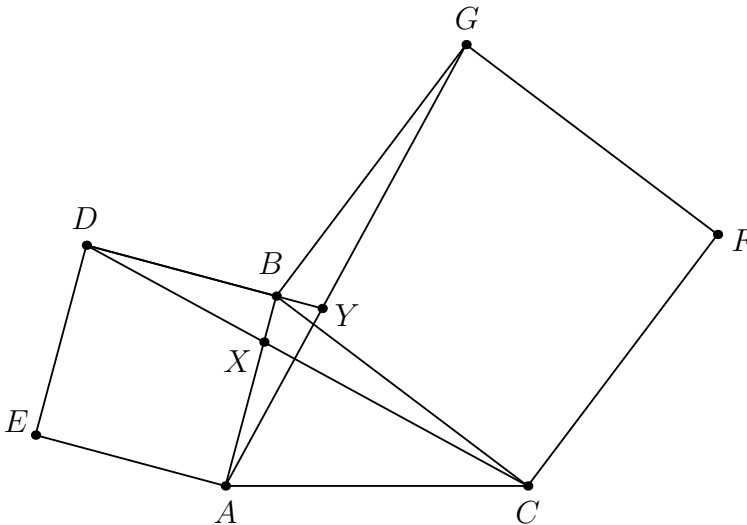
Критерии. Только оценка — 8 баллов.

Только пример — 8 баллов.



Задание 4. На сторонах AB и BC треугольника ABC вне его построены квадраты $ABDE$ и $BCFG$. Отрезки CD и AB пересекаются в точке X , а прямая BD пересекает отрезок AG в точке Y . Докажите, что $BX = BY$. (20 баллов)

Первое решение. Треугольники ABG и DBC равны по двум сторонам и углу между ними: $AB = KB$, $BL = BC$, $\angle KBC = 90^\circ + \angle B = \angle ABL$. Тогда $\angle BDG = \angle BAY$, то есть треугольники DBX и ABY равны по стороне и двум углам: $\angle BDG = \angle BAY$, $\angle DBX = 90^\circ = \angle ABY$, $BD = AB$. Следовательно, $BX = BY$, что и требовалось.



Второе решение. Легко видеть, что при повороте вокруг точки B на 90° прямые AB и CD переходят в прямые BD и GA соответственно, поэтому точка $X = AB \cap CD$ переходит в точку $BD \cap AG = Y$. Отсюда сразу следует, что $BX = BY$.

Критерии. Доказано только, что треугольники ABG и DBC равны — 6 баллов.

Задание 5. У волшебника Мерлина есть шесть гирь: две золотые, две серебряные и две бронзовые. Гири каждого вида не отличимы друг от друга внешне, но одна из них легкая, а другая — тяжелая. Все тяжелые гири весят одинаково, и все легкие гири тоже весят одинаково, причем меньше, чем тяжелые. Как Мерлин сможет определить за два взвешивания на чашечных весах все три тяжелые гири? (20 баллов)

Решение. Для краткости обозначим гири буквами G_1, G_2 (золотые), A_1, A_2 (серебряные), B_1, B_2 (бронзовые). Первым взвешиванием Мерлин сравнит между собой

$$G_1, A_1 \vee G_2, B_1.$$

Разберем возможные исходы.

1) *Одна из чаш перевесила.* Без ограничения общности будем считать, что тяжелее оказалась левая чаша (случай правой разбирается симметрично). Тогда обязательно G_1 — тяжелая, а G_2 — легкая (иначе правая чаша будет не легче). Кроме того, A_1 не легче, чем B_1 (по сути, это означает невозможность случая, когда A_1 — легкая, а B_1 — тяжелая).

Теперь вторым взвешиванием он сравнит между собой $A_1 \vee B_2$. Если левая чаша перевесит, то A_1 — тяжелая, а B_2 — легкая. Если правая чаша перевесит, то наоборот. Если же весы покажут равенство, то обе эти гири не могут быть легкими, значит, они обе — тяжелые. Во всех случаях Мерлин определит все шесть гирь.

2) *Весы показали равенство.* Возможно всего два случая: первый — когда G_1 и B_1 — тяжелые, а A_1 и G_2 — легкие, второй — наоборот. В обоих случаях Мерлину достаточно вторым взвешиванием сравнить между собой $G_1 \vee G_2$, чтобы всё узнать.

Критерии. Верный алгоритм, полное обоснование которого отсутствует — *до 10 баллов*. В решение приведено только первое взвешивание с полным разбором его итогов, сводящее задачу ко второму взвешиванию, в котором достаточно сравнить какие-то две гири — *до 6 баллов*.