

Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Математика»
заключительный этап (решения/ответы)
2023/24 учебный год
9 класс

Задание 1 (20 баллов).

В корзине лежат яблоки и мандарины, причем яблоки составляют менее 80% всех фруктов. Любочка добавляет в корзину фрукты по одному, так что в какой-то момент доля яблок становится больше 80%. Обязательно ли был момент, когда доля яблок была в точности равна 80%?

Ответ: Да.

Решение. Запишем проценты в виде обыкновенной дроби, $80\% = \frac{4}{5}$. Пусть в некоторый момент в корзине лежит n фруктов, причем доля яблок меньше, чем $\frac{4}{5}$, а после добавления одного фрукта их стало больше, чем $\frac{4}{5}$. Ясно, что в этот момент добавили яблоко (пусть их было k , тогда стало $k+1$). Имеем

$$\frac{k}{n} < \frac{4}{5}, \quad \frac{k+1}{n+1} > \frac{4}{5}; \quad \begin{cases} 5k < 4n \\ 5k+5 > 4n+4 \end{cases}; \quad 4n-1 < 5k < 4n$$

Этого не может быть при целых n и k . Значит, такого момента не будет, доля яблок не может «перескочить» через 80%.

Критерии оценивания: Ответ без всякого обоснования – 0 баллов.

Задание 2 (20 баллов).

Решите ребус $\text{СТО} \cdot \text{СТО} = \text{СЕКРЕТ}$

Ответ. $897 \cdot 897 = 804609$.

Решение. В силу того, что правая часть шестизначная, число СТО достаточно большое. Оценим его первую цифру. Имеем

$10000C < \text{СЕКРЕТ} < (100(C+1))^2$, т. е. $10C < (C+1)^2$; $C^2 - 8C + 1 > 0$, в силу целочисленности $C^2 - 8C + 1 \geq 1$, то есть $C^2 - 8C \geq 0$. С учетом того, что $C > 0$ получаем, что $C \geq 8$, откуда $\text{СТО} \geq \sqrt{800000}$; $\text{СТО} \geq 895$.

(Можно оценить значение C и с помощью перебора. Квадрат числа СТО шестизначный, значит $320 \leq \text{СТО} \leq 987$. Но тогда $C \geq 3$; $\text{СЕКРЕТ} > 300000$; $\text{СТО} \geq 548$. Тогда $C \geq 5$; $\text{СЕКРЕТ} > 500000$; $\text{СТО} \geq 708$.

Аналогично $C \geq 7$; $\text{СЕКРЕТ} > 700000$; $\text{СТО} \geq 837$ и $C \geq 8$; $\text{СЕКРЕТ} > 800000$; $\text{СТО} \geq 895$.)

Итак, цифра C равна 8 или 9. Пусть $\text{СТО}=89\text{O}$, тогда его квадрат заканчивается на $T=9$, то есть O равно 3 (слишком мало) или 7. Проверяем: $897 \cdot 897 = 804609$. Подходит.

Если $C=9$, то наименьшим значением для числа СЕКРЕТ будет 901203, то есть $\text{СТО} \geq \sqrt{901203} \geq 950$. Значит, цифра T лежит в пределах от 5 до 8 и является последней цифрой квадрата, то есть подходят 5 и 6.

$\text{СТО}=95\text{O}$, квадрат заканчивается на 5, значит, и $\text{O}=5$, чего быть не может

$\text{СТО}=96\text{O}$, квадрат заканчивается на 6, значит, и $\text{O}=4$. Проверяем: $964 \cdot 964 = 929\,296$, не подходит.

Критерии оценивания: Только ответ – 5 баллов. Если показано, что $C = 8$ или 9, но не проверено значение $C=9$, то результат – не более 10 баллов.

Задание 3 (20 баллов).

Вовочке задали на дом квадратное уравнение. «Учитель сказал, что оно имеет два целых корня, а у меня получается, что корней нет» – пожаловался он. Его папа-математик, посмотрев на уравнение, сказал: «Ты, наверное, неправильно списал с доски один из коэффициентов. Если это так, то я знаю правильный вариант задания, причем он единственный».

Докажите, что, если папа прав, то коэффициент при x Вовочка записал верно.

Решение. Пусть Вовочка записал уравнение в виде $ax^2 + bx + c = 0$ и оно не имеет корней. Предположим, что коэффициент b записан неверно.

Пусть верное задание имеет вид $ax^2 + b_1x + c = 0$. По теореме Виета $b_1 = -a(x_1 + x_2)$; $c = ax_1x_2$. Заметим, что уравнение $ax^2 - b_1x + c = 0$ в этом случае имеет корни $-x_1$; $-x_2$. Итак, если $b_1 \neq 0$, то существуют как минимум два исправления исходного уравнения, что противоречит словам папы.

Пусть теперь $b_1 = 0$, то есть уравнение $ax^2 + c = 0$ имеет корни. Это значит, что $D_1 = -4ac \geq 0$. Но тогда дискриминант исходного уравнения $D = b^2 - 4ac > 0$, то есть оно также имеет корни.

Мы показали следующий факт: если можно исправить уравнение за счёт второго коэффициента, то это исправление не единственное. Вообще говоря, надо ещё показать, что ситуация, описанная папой, возможна. Например, рассмотрим уравнение $3x^2 + x + 2 = 0$. Если не менять первый коэффициент, то новое уравнение имеет вид $3x^2 + b_1x + c_1 = 0$, где либо $b_1 = 1$, либо $c_1 = 2$. Но тогда числа $\frac{b_1}{3} = -(x_1 + x_2)$ и $\frac{c_1}{3} = x_1x_2$ не могут быть оба целыми. Значит, уравнение нельзя исправить за счёт второго или третьего коэффициента, так как ни один из них не делится на 3. Попробуем найти «правильный» коэффициент a . Ясно, что он должен быть делителем как 1, так и 2, то есть подходят только $a = 1$ и $a = -1$.

Уравнение $x^2 + x + 2 = 0$ не имеет решений, а уравнение $-x^2 + x + 2 = 0$ имеет целые корни $x = -1$ и $x = 2$. Именно оно и будет единственным возможным исправлением исходного уравнения.

Замечание. В первой части решения не используется целочисленность корней. Однако без этого ограничения высказывание папы будет неверным. Без условия целочисленности можно также привести другие варианты «исправленного» уравнения.

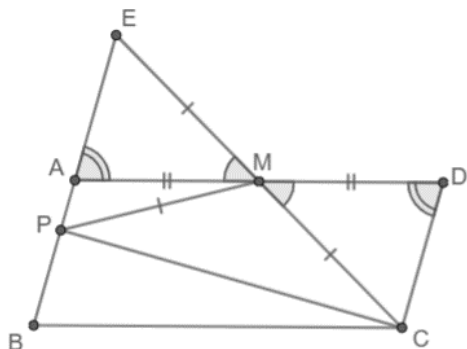
Критерии оценивания: Если не исследовано, может ли утверждение папы быть верным, баллы не снижаются.

Задание 4 (20 баллов).

В параллелограмме $ABCD$ точка M – середина стороны AD . На отрезке AB нашлась точка P такая, что $MP = MC$. Чему равен угол между прямыми PC и AB ?

Ответ. 90° .

Решение. Продолжим прямые AB и CM до пересечения в точке E . Треугольники AEM и DMC равны по стороне и двум прилежащим углам. Значит, $ME = MC = MP$, то есть точка P лежит на окружности с диаметром CE . Значит, угол $EPС$ – прямой. Он и является искомым.



Задание 5 (20 баллов).

Сколько решений в целых числах x имеет уравнение $\left[\frac{x}{20}\right] - \left[\frac{x}{24}\right] = k$, где k – некоторое фиксированное натуральное число? Здесь $[t]$ – целая часть числа t , то есть наибольшее целое число, не превосходящее t .

Ответ: 120.

Решение. Пусть $\left[\frac{x}{24}\right] = n$, тогда $\left[\frac{x}{20}\right] = n + k$, то есть $n \leq \frac{x}{24} < n + 1$; $n + k \leq \frac{x}{20} < n + k + 1$. Имеем

$$24n \leq x < 24n + 24; 20(n + k) \leq x < 20(n + k) + 20$$

Первое двойное неравенство можно переписать в виде $x = 24n + r$, $0 \leq r \leq 23$; тогда второе двойное неравенство принимает вид

$$20(n + k) \leq 24n + r < 20(n + k) + 20$$

Решим это неравенство относительно n . Для этого вычтем $20n + r$ из всех частей неравенства:

$$20k - r \leq 4n < 20k + 20 - r, \text{ то есть } 5k - \frac{r}{4} \leq n < 5k + \frac{20 - r}{4}$$

Длина полуинтервала $\left[5k - \frac{r}{4}; 5k + \frac{20-r}{4}\right)$ равна 5, поэтому он содержит 5 целых значений n при любом r . Значит, всего существует $24 \cdot 5 = 120$ решений. Заметим, что $120 = \text{НОК}(20, 24)$.