

Задания интернет-тура Олимпиады КФУ по математике для школьников 10 класса (ноябрь 2024 г)

Задачи с выбором ответов (часть А)

10.1 (8 баллов). Аделаида Ивановна решила заняться своим здоровьем. Она купила абонемент в спортзал, но ходила туда редко. Решив исправить положение, с 1 сентября она две недели ходила в спортзал каждый день. За эти две недели доля дней, когда она посещала зал, увеличилась в 6 раз.

Сколько дней А.И. посещала спортзал до 31 августа (включительно)?

- 1
- **2**
- 5
- выше нет правильного ответа

10.1 (8 баллов). Вовочка из-за болезни пропустил много учебных дней в первом полугодии. Когда он выздоровел, он стал ходить в школу без пропусков. Через 11 учебных дней доля дней, когда он был в школе, выросла в 4 раза. Сколько дней Вовочка посещал школу с начала учебного года до момента выздоровления?

- 1
- 2
- **3**
- выше нет правильного ответа

10.2 (12 баллов). Пассажир забыл (трехзначный) номер такси, однако помнит, что он содержит 0 и все его цифры различны. Найдите вероятность того, что он с первой попытки правильно вспомнит номер (буквы вспоминать не надо). Она лежит в промежутке

- от 20% до 50%
- от 2% до 20%
- от 1% до 2%
- **менее 1%**

10.2 (12 баллов). Абонент забыл пин-код (из четырех цифр), однако помнит, что он содержит ровно одну тройку и ровно два нуля. Найдите вероятность того, что он с первой попытки успешно авторизуется. Эта вероятность лежит в промежутке

- от 10% до 20%
- от 2% до 10%
- **от 1% до 2%**
- менее 1%

10.3 (8 баллов). На окружности лежат 50 точек. Выберем все тройки точек, которые образуют прямоугольный треугольник. Выберите верное утверждение из перечисленных:

- таких троек может оказаться 1920
- таких троек может оказаться 1000
- **таких троек может оказаться 432**
- таких троек может оказаться 420

10.3 (8 баллов). На окружности лежат 62 точки. Выберем все тройки точек, которые образуют прямоугольный треугольник. Выберите верное утверждение из перечисленных:

- таких троек может оказаться 1920
- таких троек может оказаться 1000
- таких троек может оказаться 432
- **таких троек может оказаться 420**

10.4 (8 баллов). Вовочка купил три сборника комиксов на 510 рублей, причем самый дорогой отличался от самого дешевого на 54 рубля. Но потом он решил, что не сможет прочитать все три и решил сдать самый дорогой обратно в магазин (при этом Вовочке вернули полную стоимость сборника). Какое из утверждений, перечисленных ниже, наверняка верно?

- он получит больше 200 рублей
- он получит меньше 200 рублей
- **он получит больше 180 рублей**
- он получит меньше 180 рублей

10.4 (8 баллов). Любочка обошла три магазина, на что у нее ушло 4,5 часа (без учета времени на переход между магазинами). В каждом следующем магазине она была меньше, чем в предыдущем. Она запомнила, что время в первом магазине отличалось от времени в последнем на 36 минут. Любочка не помнит, сколько времени провела во втором магазине. Какое из утверждений, перечисленных ниже, наверняка верно?

- это время больше 1,5 часов
- это время меньше 1,5 часов
- это время больше 2 часов
- **это время меньше 2 часов**

10.5 (8 баллов). Три различных положительных числа выписаны по возрастанию. Найдём квадраты разностей соседних пар чисел и модули разностей квадратов соседних чисел. Какое из утверждений о вычисленных 4 числах наверняка верно?

- все четыре числа могут совпадать
- может быть ровно два различных числа
- **может быть ровно три различных числа**
- они все обязательно различны

10.5 (8 баллов). Три различных неотрицательных числа выписаны по возрастанию. Найдём квадраты разностей соседних пар чисел и модули разностей квадратов соседних чисел. Сколько среди этих 4 чисел может оказаться различных? Укажите наименьшее возможное количество.

- 4
- 3
- **2**
- 1

Задачи с открытыми ответами (часть B)

10.6 (12 баллов). Пусть $\frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} = 2$ и $a + b + c = 10$. Чему равно $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$?
Ответ: 0,5.

10.6 (12 баллов). Пусть $\frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} = 7$ и $a + b + c = 5$. Чему равно $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$?

Ответ: 2.

10.7 (12 баллов). Рассмотрим числа вида $n^2 - 3n + 27$ для натуральных n . Есть ли среди них точные квадраты? Если нет – в ответе напишите 0. Если таких квадратов неограниченное количество, в ответе напишите (-1) . Если их конечное число, напишите в ответе сумму всех значений n , при которых указанное выражение является квадратом.

Ответ: 38.

10.7 (12 баллов). Рассмотрим числа вида $n^2 - 5n + 31$ для натуральных n . Есть ли среди них точные квадраты? Если нет – в ответе напишите 0. Если таких квадратов неограниченное количество, в ответе напишите (-1) . Если их конечное число, напишите в ответе сумму всех значений n , при которых указанное выражение является квадратом.

Ответ: 42.

10.8 (12 баллов). Найти наименьшее значение отношения $\frac{x^4+4}{x^2+2x+2}$

Ответ: 1.

10.8 (12 баллов). Найти наименьшее значение отношения $\frac{4x^4+1}{2x^2-2x+1}$

Ответ: 0,5.

10.9 (12 баллов). В треугольнике ABC углы при стороне AB равны 105° и 30° . Из вершин A и B проведены высоты AD и BE . Отрезок DE оказался равным $2\sqrt{2}$. Найдите длину стороны AB .

Ответ: 4.

10.9 (12 баллов). В треугольнике ABC углы при стороне AB равны 75° и 45° . Из вершин A и B проведены высоты AD и BE . Найти длину отрезка DE , если $AB = 5$

Ответ: 2,5.

10.10 (12 баллов). Графики функций $y = x^2 + 4x - 2$ и $y = 2x^2 - 3x + 1$ пересекаются в двух точках. Найдите уравнение квадратичной функции, график которой проходит через эти точки и начало координат. В ответе укажите сумму корней этой функции.

Ответ: 0,4.

10.10 (12 баллов). Графики функций $y = x^2 - 2x + 1$ и $y = -x^2 - 3x + 5$ пересекаются в двух точках. Найдите уравнение квадратичной функции, график которой проходит через эти точки и начало координат. В ответе напишите сумму коэффициентов этой функции.

Ответ: -0,25.