

Задания интернет-тура Олимпиады КФУ по математике
для школьников 11 класса
(ноябрь 2024 г)

Задачи с выбором ответов (часть А)

11.1 (8 баллов). У Любочки есть некоторое количество кукол, все они Барби или Кены. Ей подарили ещё одну Барби. После чего *доля* кукол Барби возросла на 28%. Сколько кукол теперь у Любочки?

- ответ не единственный
- ровно 14
- **ровно 25**
- выше нет правильного ответа.

11.1 (8 баллов). У Вовочки есть коллекция бабочек и стрекоз. Он поймал ещё одну бабочку, после чего *доля* бабочек в его коллекции возросла на 40%. Сколько насекомых было у Вовочки до последнего приобретения?

- ответ не единственный
- **ровно 14**
- ровно 25
- выше нет правильного ответа

11.2 (8 баллов). Любочка и Аделаида Ивановна купили одинаковые наборы бусинок двух цветов и нанизали каждая на нитку. Любочка чередует 4 синих и 3 фиолетовых, последняя группа – 4 синих. А.И. чередует 5 фиолетовых и 7 синих (последняя группа – 5 фиолетовых). Каждая из рукодельниц использовала весь свой набор. Ниже указаны варианты бус (с = синяя бусина, ф = фиолетовая). Какой из них можно составить из такого же полного набора бусин?

- $11 \text{ ф} + 14 \text{ с} + \dots + 14 \text{ с} + 11 \text{ ф}$
- **$14 \text{ с} + 11 \text{ ф} + \dots + 11 \text{ ф} + 14 \text{ с}$**
- $16 \text{ с} + 11 \text{ ф} + \dots + 11 \text{ ф} + 16 \text{ с}$
- ни один из описанных вариантов бус не получится

11.2 (8 баллов). Аделаида Иванова получила некоторое количество карандашей и ручек и решила разложить их в одинаковые наборы. Сначала она положила в каждый набор 4 карандаша и 5 ручек, у нее остался один карандаш. Тогда она переложила все предметы в наборы из 5 карандашей и 6 ручек, у нее осталось 3 ручки. Можно ли составить несколько (более одного) одинаковых наборов из всех предметов? Сколько их может получиться?

- можно составить 20 наборов
- можно составить 10 наборов
- **можно составить 5 наборов**
- более одного набора составить нельзя.

11.3 (8 баллов). Обозначим через a_n число способов, которыми прямоугольник размера $4 \times n$ можно разбить на прямоугольники 1×4 (варианты, получаемые поворотами или отражениями, считаем различными). Какие из перечисленных ниже чисел могут встретиться в последовательности a_n ?

- 40
- **69**
- 96

- ни одно из указанных выше чисел не встретится в последовательности a_n

11.3 (8 баллов). Обозначим через a_n число способов, которыми прямоугольник размера $3 \times n$ можно разбить на прямоугольники 1×3 (варианты, получаемые друг из друга поворотами или отражениями, считаем различными). Какие из перечисленных ниже чисел могут встретиться в последовательности a_n ?

- 40
- 88**
- 130
- ни одно из указанных выше чисел не встретится в последовательности a_n

11.4 (8 баллов). Дан острый угол с вершиной в точке O . На одной стороне угла даны точки A и B , $OA = 20$; $OB = 45$. Требуется найти на другой стороне точку C такую, чтобы угол ACB был наибольшим возможным. Чему равно расстояние OC ?

- 30**
- 32,5
- недостаточно данных для ответа
- выше нет правильного ответа

11.4 (8 баллов). Дан острый угол с вершиной в точке O . На одной стороне угла отмечены точки A и B . На другой стороне выбрали точку C такую, что угол ACB – наибольший из возможных. Оказалось, что $OA = 27$; $OC = 18$. Какая из точек A , B лежит ближе к вершине угла?

- $OA < OB$
- $OB < OA$**
- недостаточно данных для ответа
- выше нет правильного ответа

11.5 (8 баллов). Сколько решений имеет уравнение $x^2 + [x] = 1$? Здесь $[x]$ – целая часть x , то есть наибольшее целое число, не превосходящее x .

- 0
- 1**
- 2
- 3

11.5 (8 баллов). Сколько решений имеет уравнение $x^2 - 2[x] = 1$? Здесь $[x]$ – целая часть x , то есть наибольшее целое число, не превосходящее x .

- 0
- 1
- 2**
- 3

Задачи с открытыми ответами (часть B)

11.6 (12 баллов). Пусть $\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{d+a+b} + \frac{d}{a+b+c} = 5$ и $a + b + c + d = 12$. Чему равно $\frac{1}{b+c+d} + \frac{1}{c+d+a} + \frac{1}{d+a+b} + \frac{1}{a+b+c}$?

Ответ: 0,75.

11.6 (12 баллов). Пусть $\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{d+a+b} + \frac{d}{a+b+c} = 12$ и $a + b + c + d = 8$. Чему равно $\frac{1}{b+c+d} + \frac{1}{c+d+a} + \frac{1}{d+a+b} + \frac{1}{a+b+c}$?

Ответ: 2.

11.7 (12 баллов). В приюте несколько кошек родили котят (всего – 14 штук). При этом у шести котят по два брата, у семерых – по три и у одного – четыре. Считаем, что брат = котенок-мальчик. Сколько котят-девочек родилось в приюте?

Ответ: 4.

11.7 (12 баллов). В приюте несколько собак родили щенят (всего – 10 штук). При этом у четверых щенят по одному брату, у двоих – два и ещё у четверых – по три. Считаем, что брат = щенок-мальчик. Сколько собак родили щенков в приюте?

Ответ: 3.

11.8 (12 баллов). Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Его сечение $AD_1 C$ наклонено к граням $ABCD$, $AA_1 D_1 D$, $DD_1 C_1 C$ под углами 60° , 60° и 45° соответственно. Чему равен объём параллелепипеда если площадь сечения $AD_1 C$ равна $S = 4\sqrt{2}$?

Ответ: 16.

11.8 (12 баллов). Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Его сечение $AD_1 C$ наклонено к граням $ABCD$, $AA_1 D_1 D$, $DD_1 C_1 C$ под углами 60° , 60° и 45° соответственно. Чему равна площадь сечения $AD_1 C$, если объём параллелепипеда равен $V = 4\sqrt{2}$? В ответе запишите квадрат искомой площади.

Ответ: 8.

11.9 (12 баллов). Графики функций $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 2$ и $g(x) = 3x^3 + 5x^2 + 3x + 1$ пересекаются в трёх точках. Найдите уравнение многочлена третьей степени, график которого проходит через эти точки и начало координат. В ответе напишите сумму коэффициентов этого многочлена.

Ответ: 11.

11.9 (12 баллов). Графики функций $y = 3x^3 + 2x^2 - 5x + 2$ и $y = 2x^3 + 4x^2 - 2x + 1$ пересекаются в трёх точках. Найдите уравнение многочлена третьей степени, график которого проходит через эти точки и начало координат. В ответе напишите сумму корней этого многочлена.

Ответ: -6.

11.10 (12 баллов). Любочка позвала на свидание сразу двух парней. Вероятность, что Саша придёт на свидание, равна 0,5, для Вовочки вероятность составляет 0,4. Если придут оба поклонника, они подерутся. Мы знаем, что драки не было. С учетом этого, какова вероятность того, что Вовочка не пришел?

Ответ: 0,75.

11.10 (12 баллов). Каждому из 3 первоклассников – Пете, Коле и Вовочке – предложили загадку. Петя отгадывает в среднем 3 загадки из 4. Коля 4 из 5. Вовочка – 7 из 10. Из этих троих школьников наугад выбрали одного. Он не отгадал загадку. С учетом этого, какова вероятность того, что это был Вовочка?

Ответ: 0,4.