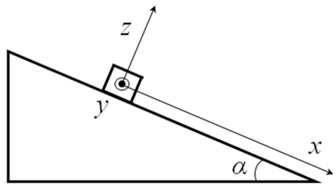
Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Физика»
заключительный этап (решения/ответы)
2022/23 учебный год
10 класс

Задача 1. (18 б.) Брусок массы m = 5 *кг* лежит на наклонной плоскости, образующей угол α = 30^0 с горизонтом. Оси координат представлены на рисунке, ось y перпендикулярна плоскости рисунка. Какую минимальную силу F в плоскости yz нужно приложить, чтобы тело сдвинулось с места. Коэффициент трения между бруском и плоскостью μ = 0.6. Сила F направлена под углом γ = 45^0 к оси z. Внешняя сила приложена таким образом, что брусок движется поступательно. Ускорение свободного падения принять за 10 м/с^2.



Возможное решение:

Спроецируем силы на оси x,y,z и запишем второй закон Ньютона. Для нахождения минимальной силы ускорение приравняем к нулю. Учтем, что сила трения скольжения направлена против скорости.

$$\begin{cases} N + F\cos\gamma = mg\cos\alpha \\ 0 = mg\sin\alpha - F_{\text{тр}\,x} \\ 0 = F\sin\gamma - F_{\text{тр}\,y} \end{cases}$$

Выразим компоненты силы трения из 2 и3 уравнения, возведем в квадрат и сложим

$$\sqrt{(F\sin\gamma)^2 + (mg\sin\alpha)^2} = F_{\text{тр}} = \mu(mg\cos\alpha - F\cos\gamma)$$

Решая кадратное уравнение, находим искомую силу. В общем случае выражение получится довольно громоздким, приведем решение для конкретных углов.

$$F = mg\frac{\sqrt{6}\mu^2 + \sqrt{8\mu^2 - 2}}{2(\mu^2 - 1)} \approx 0.044mg \approx 2.2 \text{ Н}$$

Второй корень получится отрицательным и не имеет физического смысла.

Критерии оценивания:

Верно записан второй закон Ньютона по всем осям. По 3 балла за ось.	9
Сила трения выражена из уравнений и связана с силой нормальной реакции опоры.	4
Получена верная формула для искомой силы.	3
Получен верный численный ответ.	2

Задача 2. (20 б.) Сруб окружен со всех сторон остекленной верандой. Сруб отапливается батареей с постоянной температурой (батарея находится внутри сруба). При температуре на улице T_e = -12 ^{0}C, температура в срубе T_i = 24 ^{0}C. Температура на веранде при этом равна T_m = -5 ^{0}C. После открытия окон на веранде (температура на веранде выровнялась с улицей), температура в срубе упала до T_i' = 20 ^{0}C. Найдите температуру на веранде и в срубе, если на улице похолодало до T_{e1} = -20 ^{0}C, а окна на веранде закрыты. Теплообменом через пол и потолок для простоты пренебречь.

Возможное решение:

По закону Ньютона – Рихмана запишем баланс получаемой и отдаваемой тепловой мощности для сруба. Коэффициенты теплоотдачи обозначим за α с соответствующими индексами. Температуру батареи обозначим за T_r. Температуры после похолодания отметим дополнительным индексом 1.

$$\begin{cases} \alpha_{ri}(T_r - T_i) = \alpha_{im}(T_i - T_m) \\ \alpha_{im}(T_i - T_m) = \alpha_{me}(T_m - T_e) \end{cases}$$

$$\frac{\alpha_{ri}}{\alpha_{im}} = \frac{(T_i - T_m)}{(T_r - T_i)}$$

$$k_{ie} = \frac{\alpha_{im}}{\alpha_{me}} = \frac{(T_m - T_e)}{(T_i - T_m)} = \frac{7}{29}$$

С открытыми окнами

$$\alpha_{ri}(T_r - T_i') = \alpha_{im}(T_i' - T_e)$$
$$\frac{(T_i - T_m)}{(T_r - T_i)}(T_r - T_i') = (T_i' - T_e)$$
$$\frac{(T_r - T_i')}{(T_r - T_i)} = \frac{(T_i' - T_e)}{(T_i - T_m)} = k = \frac{34}{27}$$
$$T_r = \frac{kT_i - T_i'}{k - 1} = 53\ ^0\text{C}$$
$$k_{rm} = \frac{\alpha_{ri}}{\alpha_{im}} = \frac{(T_i - T_m)}{(T_r - T_i)} = \frac{3}{4}$$

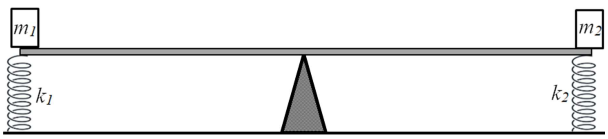
После похолодания

$$\begin{cases} k_{rm}(T_r - T_{i1}) = (T_{i1} - T_{m1}) \\ k_{ie}(T_{i1} - T_{m1}) = (T_{m1} - T_{e1}) \end{cases}$$
$$\begin{cases} T_{i1} = 19.9\ ^0\text{C} \approx 20\ ^0\text{C} \\ T_{m1} = -12.3\ ^0\text{C} \approx -12\ ^0\text{C} \end{cases}$$

Критерии оценивания:

Записан закон Ньютона – Рихмана или закон Фурье.	2
Верно записано равенство тепловых потоков батарея комната и комната веранда с закрытыми окнами.	4
Верно записано равенство тепловых потоков батарея комната и комната веранда с закрытыми окнами.	4
Найдена температура батареи.	3
Верно записано равенство тепловых потоков после похолодания.	4
Найдены искомые температуры после похолодания.	3

Задача 3. (21 б.) На концах невесомого рычага расположены точечные массы m_1 и m_2 и прикреплены невесомые пружины жесткостью k_1 и k_2. Расстояния от концов рычага до точки опоры равны. Длины пружин в недеформированном состоянии подобраны таким образом, чтобы рычаг находился в равновесии в горизонтальном положении. Найти частоту малых колебаний рычага после небольшого отклонения его от горизонтали. Рычаг в процессе колебаний не отрывается от точки опоры. Длины пружин много больше амплитуды колебаний.



Возможное решение

Рассмотрим сначала условие равновесия рычага. Запишем баланс моментов относительно точки опоры. Примем длину рычага за $2l$.

$$lm_2g + lk_2\Delta x_2 - lm_1g - lk_1\Delta x_1 = 0$$

Запишем выражение для полной механической энергии системы. Положение рычага и скорость всех его точек однозначно определяются наклоном рычага к горизонтали φ и соответствующей угловой скоростью $\dot{\varphi}$.

$$E \approx \frac{m_1 l^2 \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m_2 l^2 \dot{\varphi}^2}{2} - m_1 g l \sin\varphi + m_2 g l \sin\varphi + \frac{k_1(\Delta x_1 - l\sin\varphi)^2}{2} + \frac{k_2(\Delta x_2 + l\sin\varphi)^2}{2}$$

В этом равенстве мы учли, что длина пружин много больше амплитуды колебаний. Для малого угла sin φ ≈ φ, выраженного в радианах.

$$E \approx \frac{m_1 l^2 \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m_2 l^2 \dot{\varphi}^2}{2} - m_1 g l\,\varphi + m_2 g l \varphi + \frac{k_1(\Delta x_1 - l\varphi)^2}{2} + \frac{k_2(\Delta x_2 + l\varphi)^2}{2} =$$

$$=\frac{(m_1l^2+m_2l^2)\dot{\varphi}^2}{2}+(-m_1gl+m_2gl-k_1\Delta x_1l+k_2\Delta x_2l)\varphi+\frac{k_1{\Delta x_1}^2+k_2{\Delta x_2}^2}{2}+\frac{\varphi^2l^2}{2}(k_1+k_2)$$

Второе слагаемое равно нулю в силу условия равновесия.
Сравним это выражение с энергией одномерного гармонического осциллятора:

$$E_h=\frac{m^*\dot{q}^2}{2}+\omega^2\frac{m^*q^2}{2}+const$$

где q и $\dot{q}$ – обобщенная координата и обобщенная скорость, в данной задаче угол и угловая скорость.

$$E=\frac{(m_1+m_2)l^2\dot{\varphi}^2}{2}+\frac{(k_1+k_2)}{(m_1+m_2)}\frac{(m_1+m_2)l^2\varphi^2}{2}+const$$

Циклическая частота и период малых колебаний

$$\omega=\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m_1+m_2}};\ T=2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k_1+k_2}}$$

Критерии оценивания:

Верно записано условие равновесия рычага.	4
Верно записана полная механическая энергия или возвращающая сила для системы, выведенной из положения равновесия.	6
Проведено разложение по малому параметру.	4
Энергия или уравнение колебаний приведена к каноническому виду.	4
Найден период колебаний.	3

Задача 4. (18 б.) Птица, высиживая кладку яиц, заметила, что ее окружает плотный рой мелких мошек. Она придумала следующую стратегию «охоты» на них: отрыть клюв, а затем, дождавшись когда мошки сами в него залетят, быстро закрыть его и проглотить за 0.5 секунд (клюв в это время закрыт). Оцените количество мошек в 1 м^3, если птица таким способом смогла поймать 5 г мошек за 12 часов. Массу одной мошки примите за 2 мг, объем открытого клюва птицы 27 см^3. Считать, что мошка меняет направление своего движения случайным образом на масштабе расстояний, значительно превышающим размер клюва, и движется со средней скоростью 3 см/с.

Возможное решение:

Масса всех мошек M может быть найдена как масса съеденной за одну итерацию «охоты» ΔM на количество итераций. Количество итераций $N = T/(t+\tau)$, где $T = 12\cdot 3600$ *с* – полное время. Время, за которое мошка залетает в открытый клюв, t, может быть оценено как отношение характерного размера l клюва к скорости мошки. Здесь мы пренебрегаем различными множителями порядка 1.

$$l\approx\sqrt[3]{V}=3\text{см},$$

где V – объем клюва.

$$t=\frac{l}{v}=1\ c$$

и число итераций:

$$N=\frac{T}{t+\tau}\approx 2.9\cdot 10^4$$

Масса за одну итерацию

$$\Delta M=mnV$$

где m – масса мошки, n – искомая концентрация.

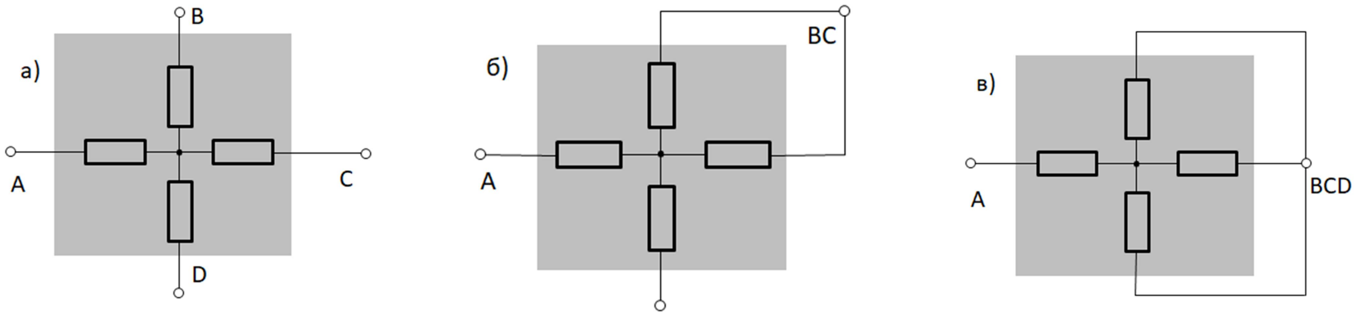
$$M=\Delta M\cdot N=\frac{mnVT}{\tau+\frac{\sqrt[3]{V}}{v}}$$

$$n=\frac{M(\tau+\frac{\sqrt[3]{V}}{v})}{mVT}\approx 3\cdot 10^3\ \text{м}^{-3}$$

Критерии оценивания:

Оценка характерного размера клюва.	4
Оценка времени одного цикла.	3
Связь общей массы мошек с концентрацией.	3
Формула для концентрации.	4
Численный ответ, верный по порядку величины.	4

Задача 5. (23 б.) Четыре одинаковых резистора соединены как показано на рисунке (см. рис. а), и запаяны в диэлектрический куб с высокой теплопроводностью. Получившийся четырехполюсник подключают с помощью соединительных проводов, сопротивление которых пренебрежимо мало по сравнению с сопротивлением резистора, во всех случаях к одинаковому идеальному источнику напряжения. При подключении к клеммам A и B через источник протекает ток $I_1 = 2.00$ А (см. рис а). При подключении к клеммам A и BC – ток $I_2 = 2.50$ А (см. рис. б). Какой ток будет протекать через источник, если подключить его к клеммам A и BCD (см. рис. в)? Сопротивление резисторов зависит от температуры по линейному закону. Считать, что из-за высокой интенсивности теплообмена внутри диэлектрического куба по сравнению с теплообменом куба с окружающей средой, температуры резисторов практически равны при любом варианте подключения. Температура и прочие параметры окружающей среды во всех случаях одинаковы. Радиационным теплообменом пренебречь. Все токи в задаче подразумеваются установившимися (через продолжительное время после подключения).



Возможное решение:

В установившемся режиме тепловая мощность тока равна мощности тепловых потерь через поверхность диэлектрического куба. Обозначим за U напряжение на источнике, k – коэффициент, связывающий разность температур окружающей среды и куба и тепловую мощность потерь энергии через его поверхность.

$$\begin{cases} k\Delta T_1 = UI_1 \\ k\Delta T_2 = UI_2 \end{cases}$$

С другой стороны закон Ома с учетом температурной зависимости сопротивления для случая а) и б) имеет вид

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{U}{2R_0(1+\alpha\Delta T_1)} \\ I_2 = \dfrac{U}{1.5R_0(1+\alpha\Delta T_2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{U}{2R_0\left(1+\dfrac{\alpha U I_1}{k}\right)} \\ I_2 = \dfrac{U}{1.5R_0\left(1+\dfrac{\alpha U I_2}{k}\right)} \end{cases}$$

Здесь U – напряжение на источнике, R_0 сопротивление одного резистора при температуре окружающей среды, α характеризует зависимость сопротивления от температуры.

Введем параметры $I_0 = \frac{U}{R_0}$ и $b = \frac{\alpha U}{k}$

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{I_0}{2(1 + bI_1)} \\ I_2 = \dfrac{I_0}{1.5(1 + bI_2)} \end{cases}$$

$b = \frac{4I_1 - 3I_2}{3I_2^2 - 4I_1^2} = \frac{2}{11} \approx 0.182$; $I_0 = \frac{6I_2 I_1 (I_2 - I_1)}{3I_2^2 - 4I_1^2} = \frac{60}{11} \approx 5.45$;

Ток при подключении к клеммам AD и BC I_3 можно найти из аналогичного уравнений.

$$\begin{cases} I_3 = \dfrac{3U}{4R_0(1 + \alpha \Delta T_3)} \\ k\Delta T_3 = UI_3 \end{cases}$$

$$I_3 = \frac{3I_0}{4(1 + bI_3)}$$

Решая квадратное уравнение, получаем I_3

$$I_3 = \frac{-1 + \sqrt{3bI_0 + 1}}{2b} \approx 2.73 \text{ А}$$

Критерии оценивания:

Равенство тепловой мощности тока и мощности тепловых потерь через поверхность.	4
Закон Ома для случая а) и б) с учетом зависимости от температуры.	6
Введение параметров, подходящих для дальнейшего решения задачи.	3
Определение введенных выше параметров из известного соотношения токов.	4
Уравнение для искомого тока	4
Получен верный ответ	2