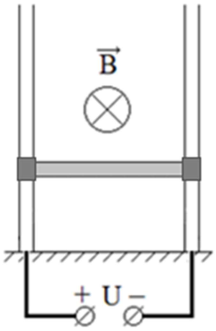
Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Физика»
заключительный этап
2023/24 учебный год
11 класс
Разбор задач

Пояснения к критериям оценивания.
*Для получения полного балла по каждому пункту критериев в решении должен присутствовать закон, уравнение, неравенство, идея или прием, подходящий **конкретно** к данной задаче и записанный **верно**. При наличии общей формулировки или ошибки по данному пункту выставляется балл меньше максимального, включая 0 баллов. Решения далекие от авторского оцениваются вне критериев.*

Задача 1. (20 б.) Тонкий однородный проводник с линейной массовой плотностью ρ и удельным сопротивлением на единицу длины λ может скользить без трения по вертикальным однородным проводящим рельсам. Удельное сопротивление рельс на единицу длины так же, как и у проводника, равно λ. Конструкция находится в однородном магнитном поле величиной B, направление которого показано на рисунке. К конструкции приложено напряжение U, как показано на рисунке. Сопротивлением источника напряжения, подводящих проводов и контакта проводника с рельсами пренебречь. Пренебрегите также магнитным полем тока в образовавшемся контуре. Найдите частоту малых вертикальных гармонических колебаний проводника при отклонении от положения равновесия, много меньшем высоты положения равновесия.



Указание: $(1 + a)^{\gamma} \approx 1 + \gamma a$ при $a \ll 1$.

Возможное решение:
На проводник будет действовать сила тяжести (вниз) и сила Ампера (вверх). Сила Ампера будет зависеть от положения проводника, поскольку при изменении его положения будет меняться сопротивление рельс и, как следствие, ток через проводник.
Запишем второй закон Ньютона для проводника:

$$ma = BIl - mg$$

где l – длина проводника, m – его масса.
Но $m = \rho l$, поэтому

$$a = \frac{BI}{\rho} - g$$

По закону Ома

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{2\lambda x + \lambda l} = \frac{U}{\lambda}\frac{1}{l + 2x}$$

где x – вертикальная координата проводника (отсчитываем от поверхности).
Тогда

$$a = \frac{BU}{\rho\lambda}\frac{1}{l+2x} - g$$

При подъеме проводника за счет силы Ампера, эта сила будет уменьшаться. В результате проводник установится в некотором положении равновесия. Найдем положение равновесия, приравняв ускорение к нулю:

$$x_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{BU}{\rho\lambda g} - l\right)$$

Обозначим отклонение от положения равновесия как $\Delta x = x - x_0$. Подставим $x = x_0 + \Delta x$ в уравнение*

$$a = \frac{BU}{\rho\lambda}\frac{1}{l + 2x_0 + 2\Delta x} - g$$

Перепишем уравнение

$$a = \frac{BU}{\rho\lambda(l + 2x_0)} \frac{1}{1 + \frac{\Delta x}{\frac{l}{2} + x_0}} - g$$

По условию задачи $\Delta x \ll x_0$, значит $\frac{\Delta x}{\frac{l}{2}+x_0} \ll 1$. Можем совершить переход по приближенной формуле, данной в указании:

$$a = \frac{BU}{\rho\lambda(l + 2x_0)} \left(1 - \frac{\Delta x}{\frac{l}{2} + x_0}\right) - g$$

Перепишем уравнение с учетом выражения для x_0

$$a + \frac{2\rho\lambda g^2}{BU} \Delta x = 0$$

Ускорение – вторая производная координаты по времени, отсюда

$$\Delta x_t'' + \frac{2\rho\lambda g^2}{BU} \Delta x = 0$$

Подставим отклонение Δx в виде $\Delta x = A \sin(\omega t + \varphi)$

$$-A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) + A \frac{2\rho\lambda g^2}{BU} \sin(\omega t + \varphi) = 0$$

Отсюда получим

$$\omega = g \sqrt{\frac{2\rho\lambda}{BU}}$$

$$\nu = \frac{g}{\pi} \sqrt{\frac{\rho\lambda}{2BU}}$$

*В задаче подразумевается, как сказано в условии, что к системе приложено фиксированное напряжение. Кроме этого в условии явно указано, что следует рассмотреть гармонические колебания. Однако, если трактовать источник напряжения как батарейку без внутреннего сопротивления в данной задаче можно учесть затухание колебаний в рамках известных в условии величин.

Если учесть ЭДС индукции из-за движения проводника, то второй закон Ньютона после аналогичных приведенным выше преобразований принимает вид:

$$\Delta x_t'' = \frac{B(U - B\Delta x_t' l)}{\rho\lambda(l + 2x_0)} \left(1 - \frac{\Delta x}{\frac{l}{2} + x_0}\right) - g$$

Оставляя только линейные слагаемые

$$\Delta x_t'' + \frac{Blg}{U} \Delta x_t' + \frac{2\rho\lambda g^2}{BU} \Delta x = 0$$

Дальнейшая работа с этим уравнением выходит за рамки школьной программы. Оно описывает затухающие колебания, частота которых получает, как правило, небольшую поправку.

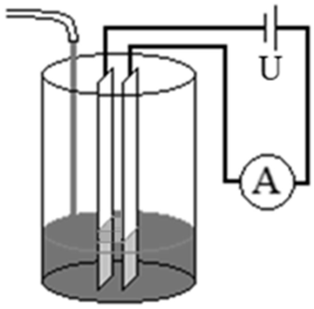
$$\omega' = \omega \sqrt{1 - \frac{B^3 l^2}{8\rho\lambda U}}$$

Решения, учитывающие этот эффект, рассматриваются вне критериев.

Критерии оценивания:

Записан второй закон Ньютона для проводника.	3
Ток выражен через координату проводника.	3
Найдено положение равновесия.	3
Второй закон Ньютона переписан через смещение от положения равновесия.	3
Линеаризация второго закона Ньютона.	5
Найдена частота малых колебаний.	3

Задача 2. (20 б.) На горизонтальном дне цилиндрического сосуда радиусом r вертикально установлены две длинные тонкие проводящие пластины шириной a. Они установлены друг напротив друга и параллельны друг другу, расстояние между ними равно $d \ll a$. Эти пластины включены в электрическую цепь, как показано на рисунке. В цепь включен идеальный амперметр и идеальный источник напряжения U. Сосуд заполняется дистиллированной водой. Объемный расход воды, вытекающей из крана в сосуд $Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = const$. За счет эффекта втягивания диэлектрика в конденсатор, между пластинами образовался столб воды с постоянной высотой над поверхностью жидкости, высота столба существенно меньше длины пластин. Какой ток показывает амперметр? Диэлектрическая проницаемость воды ε, диэлектрическую проницаемость воздуха считать равной единице, электрическая постоянная ε_0.



Возможное решение:
Так как между пластинами помещены диэлектрики – воздух и дистиллированная вода, между пластинами ток протекать не будет. Пластины в данном случае являются обкладками конденсатора, емкость которого будет изменяться за счет изменения диэлектрической проницаемости между обкладками. По определению емкость $C = \frac{q}{U}$. Поскольку идеальный источник ЭДС дает постоянное напряжение равное U, можем записать $\Delta C = \frac{\Delta q}{U}$. Таким образом, ток в цепи будет вызван только изменением емкости конденсатора и, как следствие, изменением заряда, накапливаемого на обкладках.
Известно, что ток в цепи равен заряду, проходящему через нее в единицу времени $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$. Тогда для тока в цепи можем записать

$$I = U\frac{\Delta C}{\Delta t}$$

Задача сводится к нахождению скорости изменения емкости.
Данный конденсатор мы можем представить, как два параллельно соединенных конденсатора с разными диэлектриками и переменной площадью обкладок. Общая емкость будет равна сумме этих емкостей.
Пусть C_A – емкость конденсатора с водой, C_B - емкость конденсатора с воздухом, x – высота уровня воды относительно дна сосуда, l – общая длина пластин, h_0 – высота столба. Тогда

$$C_A = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon a}{d}(x + h_0)$$

$$C_B = \frac{\varepsilon_0 a}{d}\left(l - (x + h_0)\right)$$

$$C = C_A + C_B = \frac{\varepsilon_0 a}{d}\left(l + (\varepsilon - 1)(x + h_0)\right)$$

Объем воды в сосуде $V = \pi r^2 x$. Выразим x и подставим в выражение для емкости

$$C = \frac{\varepsilon_0 a}{d}\left(l + (\varepsilon - 1)h_0 + (\varepsilon - 1)\frac{V}{\pi r^2}\right)$$

Пусть в момент времени t объем воды, находящейся в сосуде, V_t, соответствующая ему емкость C_t. А в момент времени $t + \Delta t$ этот объем равен $V_{t+\Delta t}$, емкость соответственно $C_{t+\Delta t}$. Тогда

$$C_{t+\Delta t} = \frac{\varepsilon_0 a}{d}\left(l + (\varepsilon - 1)h_0 + \frac{(\varepsilon - 1)}{\pi r^2}V_{t+\Delta t}\right)$$

$$C_t = \frac{\varepsilon_0 a}{d}\left(l + (\varepsilon - 1)h_0 + \frac{(\varepsilon - 1)}{\pi r^2}V_t\right)$$

Изменение емкости за время Δt будет равно

$$\Delta C = C_{t+\Delta t} - C_t = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)a}{\pi r^2 d}(V_{t+\Delta t} - V_t) = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)a}{\pi r^2 d}\Delta V$$

Выразим ΔV через объемный расход

$$\Delta C = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)a}{\pi r^2 d}Q\Delta t$$

Подставив полученное выражение для ΔC, получим искомый ток

$$I = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)a}{\pi r^2 d} UQ$$

Критерии оценивания:

Ток выражен через изменение емкости конденсатора.	4
Емкость выражена через уровень воды.	4
Связь уровня воды и объемного расхода.	4
Изменение емкости за единицу времени.	6
Искомый ток.	2

Задача 3. (20 б.) Интенсивностью светового излучения называется отношение суммарной мощности лучей, проходящих сквозь площадку ΔS, перпендикулярную направлению излучения, к площади этой площадки ($I = \frac{\Delta P}{\Delta S}$, где ΔP – мощность, проходящая сквозь площадку ΔS). Интенсивность излучения точечного изотропного источника убывает с расстоянием по закону $I = \frac{P}{4\pi r^2}$, где P – мощность источника, r – расстояние от источника. Два точечных изотропных источника света находятся на расстоянии a друг от друга. Мощность первого источника P, а мощность второго источника $8P$.

1) Какая точка отрезка, соединяющего эти два источника, будет наименее освещенной?
2) Чему равно значение интенсивности светового излучения в этой точке?

Интерференцией света пренебречь, считая свет, излучаемый этими источниками немонохроматическим.

Возможное решение:

Рассмотрим малую площадку ΔS, через которую перпендикулярно проходит отрезок, соединяющий источники. С одной стороны через нее будут проходить лучи от первого источника, с другой – лучи от второго источника. Так как свет немонохроматическиий, световые волны разных частот будут накладываться друг на друга хаотически во времени, максимумы и минимумы интерференции наблюдаться не будут. В среднем мощность лучей от источника, проходящих через площадку, будет монотонно убывать с расстоянием от данного источника.

Общая мощность лучей, проходящих через эту площадку, будет равна сумме мощностей лучей первого и второго источников

$$\Delta P = \Delta P_1 + \Delta P_1$$

Тогда общая интенсивность

$$I = \frac{\Delta P}{\Delta S} = I_1 + I_2$$

Зная закон убывания интенсивности с расстоянием от источника, для общей интенсивности получим

$$I = \frac{P_1}{4\pi r_1^2} + \frac{P_2}{4\pi r_2^2}$$

Приближаясь к одному источнику, мы удаляемся от второго. При этом интенсивность излучения, исходящего от одного источника, увеличивается, а от второго – уменьшается. Значит существует точка, в которой суммарная интенсивность будет минимальна. Она и будет наименее освещенной.

1) Найдем координату точки с минимальной суммарной интенсивностью. Координату будем отсчитывать, например, от первого источника

$$I = \frac{P}{4\pi}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{8}{(a-x)^2}\right)$$

Найдем производную функции и приравняем ее к нулю

$$I'_x = \frac{P}{4\pi}\left(-\frac{2}{x^3} - \frac{2*8}{(x-a)^3}\right) = 0$$

Получим уравнение на координату

$$\frac{1}{x^3} + \frac{8}{(x-a)^3} = 0$$

Преобразовав его, получим кубическое уравнение*

$$9x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 = 0$$

Перегруппируем слагаемые

$$(3x^2 + a^2)(3x - a) = 0$$

Найдем корень уравнения $x = \frac{a}{3}$

Таким образом, искомая точка расположена на расстоянии $\frac{a}{3}$ от первого источника мощностью P (или на расстоянии $\frac{2a}{3}$ от второго источника мощностью $8P$).

2) Для нахождения значения интенсивности в этой точке подставим полученное расстояние в исходное выражение для суммарной интенсивности

$$I = \frac{P}{4\pi}\left(\frac{1}{\left(\frac{a}{3}\right)^2} + \frac{8}{\left(\frac{2a}{3}\right)^2}\right)$$

В результате получим

$$I = \frac{27P}{4\pi a^2}$$

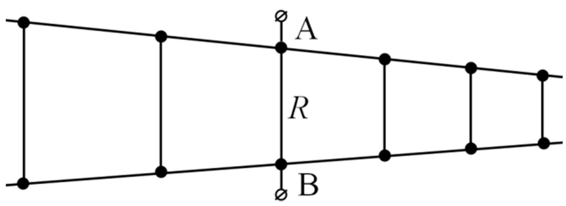
*Один из корней можно получить сразу. Переносим одно из слагаемых вправо и извлекаем кубический корень.

Критерии оценивания:

Выражение для интенсивности в произвольной точке отрезка.	4
Вычислена производная от суммарной интенсивности.	4
Работа с уравнением на координату экстремума.	5
Найден нужный корень. Найдена наименее освещенная точка.	4
Получено искомое значение интенсивности.	3

Задача 4. (20 б.) Представленная на рисунке цепь из однородной проволоки состоит из бесконечного в обе стороны количества равнобедренных трапеций, каждая из которых обладает следующим двумя свойствами:

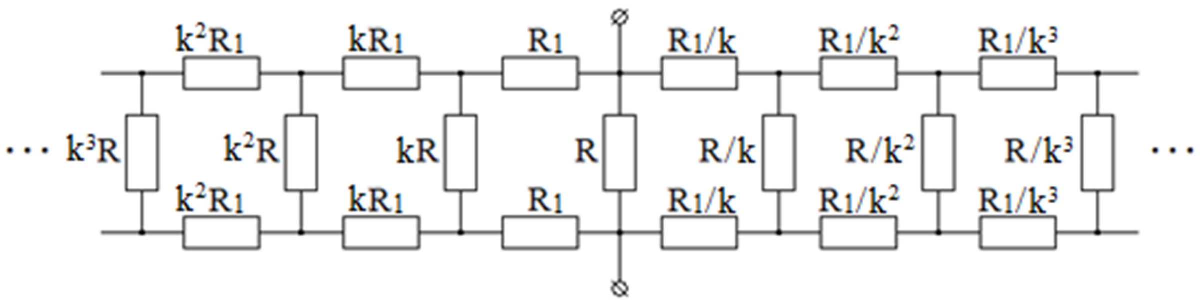
1. Высота равна меньшему основанию.
2. Отношение большего к меньшему основанию равно k =19/12.



Найти сопротивление между точками A и B, если сопротивление прямого участка проволоки между клеммами равно R.

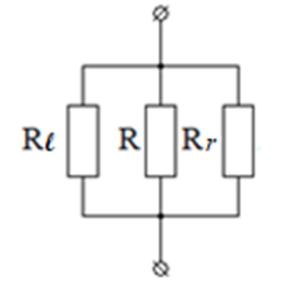
Возможное решение:

Нарисуем эквивалентную схему:



Выделим три параллельные ветви.* Введем эквивалентное сопротивление для правой и левой ветвей, обозначим его R_l и R_r .

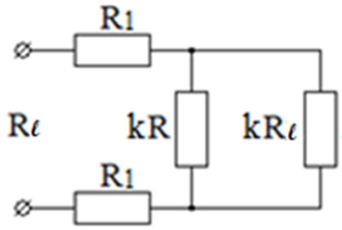
Перерисуем схему:



Полученная схема состоит из трех параллельно соединенных резисторов. Сопротивление этой цепи:

$$R_{AB} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_r} + \frac{1}{R_l}}$$

Найдем R_l. Так как ветвь цепи бесконечна, если «убрать» из нее одно звено, цепь перейдет в подобную цепь. Единственное различие с исходной – увеличение номинала каждого из резисторов в k раз. Это приводит к увеличению сопротивления всей цепи в k раз. Тогда можем нарисовать схему ветви цепи с сопротивлением R_l следующим образом:



где R_1- сопротивление боковых сторон. Его сопротивление можно найти из геометрических соображений. Если провести высоту из точки A, она отсекает от основания трапеции отрезок $\frac{k-1}{2}AB$. Таким образом, длина боковой стороны и ее сопротивление равны соответственно:

$$AB\sqrt{1 + \frac{(k-1)^2}{4}}$$

$$R_1 = R\sqrt{1 + \frac{(k-1)^2}{4}} = \frac{25R}{24}$$

Из представленной выше схемы можно получить рекурсивное соотношение:

$$R_l = 2R_1 + \frac{1}{\frac{1}{kR} + \frac{1}{kR_l}}$$

Преобразуем его и получим квадратное уравнение на R_l

$$R_l^2 - \big((k-1)R + 2R_1\big)R_l - 2RR_1 = 0$$
$$12R_l^2 - 32RR_l - 25R^2 = 0$$

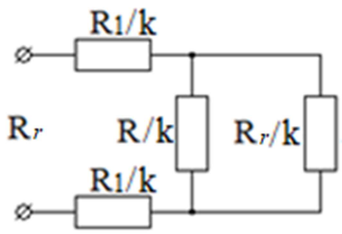
Найдем корни уравнения

$$R_l = R\,\frac{\left(8 \pm \sqrt{139}\right)}{6}$$

Берем только корень со знаком «+», так как корень со знаком «–» отрицателен и не имеет физического смысла.

$$R_l \approx 3.30R$$

Аналогично для правой ветви



Рекурсивное соотношение:

$$R_r = 2\frac{R_1}{k} + \frac{1}{\frac{k}{R} + \frac{k}{R_r}}$$

Квадратное уравнение на R_r

$$kR_r^2 - (2R_1 + R(1-k))R_r - 2RR_1 = 0$$
$$19R_r^2 - 18RR_r - 25R^2 = 0$$

Найдем корни уравнения

$$R_r = \frac{R\left(9 \pm 2\sqrt{139}\right)}{19}$$

Берем только корень со знаком «+», так как корень со знаком «–» отрицателен и не имеет физического смысла.

$$R_r \approx 1.71R$$

Подставив R_l и R_r в выражение для R_{AB}, окончательно получим

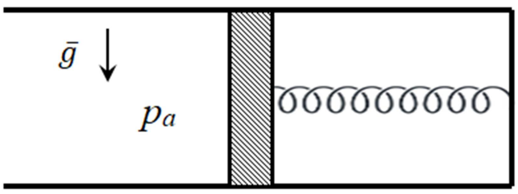
$$R_{AB} \approx 0.530R$$

* Можно воспользоваться самоподобием исходной цепи на этом этапе, заметив, что при сдвиге клемм на одно звено вправо или влево, сопротивление меняется в k раз.

Критерии оценивания:

Найдено отношение сопротивлений боковой стороны и основания трапеции.	2
Изображена эквивалентная схема (необязательно, засчитывается автоматически, если последующие три шага правильные)	3
Идея об изменении в k раз сопротивления при удалении перового звена «бесконечной» цепи.	4
Эквивалентная схема (с учетом самоподобия) для правой и левой «бесконечной» цепи и/или соответствующее уравнение (2 балла за одну правильную, 1 за вторую).	3
Найдено сопротивление «бесконечных» цепей. (по 3 балла)	6
Найдено общее сопротивление.	2

Задача 5. (20 б.) Один моль идеального двухатомного газа находится в расположенном горизонтально цилиндрическом сосуде. Порция газа ограничена вертикальным герметичным поршнем, который может двигаться вдоль оси цилиндра без трения. К поршню и дну сосуда прикреплена горизонтальная идеальная пружина (см. Рисунок). В начальном состоянии температура газа равна температуре окружающей среды, пружина не деформирована. Объемом пружины можно пренебречь. Если начальную температуру газа, ограниченного поршнем, повысить в η раз, то объем газа повысится в μ раз. Найдите теплоёмкость **газа,** ограниченного поршнем, в **начальном** состоянии.



Возможное решение:

Учитывая, что вначале пружина не деформирована, из баланса сил получаем для давления газа в сосуде.

$$p = p_a + \frac{k\Delta x}{S}$$

где Δx и S соответственно смещение и площадь поршня. Смешение можно связать с объемом газа.

$$p = p_a + \frac{k(V - V_0)}{S^2} = p_a + \alpha(V - V_0)$$

Выразим объем газа через уравнение Менделеева – Клапейрона

$$V(p_a + \alpha(V - V_0)) = RT$$
$$V = \frac{\alpha V_0 - p_a + \sqrt{V_0^2\alpha^2 + 4\alpha RT - 2V_0\alpha p_a + p_a^2}}{2\alpha}$$
Учитывая первое начало термодинамики, теплоемкость вычисляется по формуле
$$C = \frac{dQ}{dT} = \frac{pdV + \frac{5}{2}RdT}{dT} = p\frac{dV}{dT} + \frac{5}{2}R;$$
$$\frac{dV}{dT} = \frac{R}{\sqrt{V_0^2\alpha^2 + 4\alpha RT - 2V_0\alpha p_a + p_a^2}};$$
В начальном состоянии*
$$RT_0 = p_aV_0$$
$$C = \frac{Rp_a}{\alpha V_0 + p_a} + \frac{5}{2}R = R\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{1 + \frac{\alpha V_0}{p_a}}\right);$$
Вычислим неизвестный параметр $\frac{\alpha V_0}{p_a}$ из известных значений η и μ
$$p_aV_0 = RT_0$$
$$(p_a + \alpha(\mu V_0 - V_0))\mu V_0 = \eta RT_0$$
$$\left(1 + \frac{\alpha V_0(\mu - 1)}{p_a}\right)\mu = \eta$$
$$\frac{\alpha V_0}{p_a} = \frac{(\eta - \mu)}{\mu(\mu - 1)}$$
Окончательно, теплоемкость газа
$$C = R\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{1 + \frac{(\eta - \mu)}{\mu(\mu - 1)}}\right)$$
*Возможны другие способы получить этот результат. Пользуясь выражением для дифференциала температуры, молярную теплоемкость можно записать в следующем виде
$$C = \frac{dQ}{dT} = \frac{pdV + \frac{5}{2}RdT}{dT} = \frac{pR}{p + V\frac{dp}{dV}} + \frac{5}{2}R$$
Другая альтернатива. Рассмотрим малое изменение объема вблизи начального состояния.
$$\Delta\big((p_a + \alpha(\Delta V))V\big) = R\Delta T$$
Учитывая малость $(\Delta V)^2$ по сравнению с $V_0\Delta V$
$$p_a\Delta V + V_0\alpha\Delta V = R\Delta T$$
$$p_a\frac{\Delta V}{\Delta T} + V_0\alpha\frac{\Delta V}{\Delta T} = R$$
$$\frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{R}{\alpha V_0 + p_a}$$

Критерии оценивания:

Давление газа выражено через деформацию пружины.	3
Записано уравнение, содержащее только температуру, объем и постоянные величины. Засчитывается автоматически, если используется формула для теплоемкости через $\frac{dP}{dV}$.	3
Формула для теплоемкости через $\frac{\Delta V}{\Delta T}$ $(\Delta T \to 0)$, $\frac{dV}{dT}$, $\frac{dP}{dV}$.	4
Теплоемкость выражена через αV_0.	5
Неизвестная константа выражена через η и μ.	4
Окончательное выражение для теплоемкости.	1