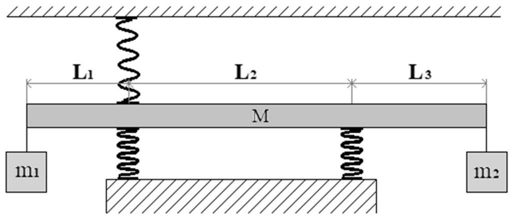
Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Физика»
заключительный этап
2023/24 учебный год
8 класс
Разбор задач.

Пояснения к критериям оценивания.
*Для получения полного балла по каждому пункту критериев в решении должен присутствовать закон, уравнение, неравенство, идея или прием, подходящий **конкретно** к данной задаче и записанный **верно**. При наличии общей формулировки или ошибки по данному пункту выставляется балл меньше максимального, включая 0 баллов. Решения далекие от авторского оцениваются вне критериев.*

Задача 1. (25 б.)



Однородная балка массой $M = 4$ кг закреплена на трех одинаковых невесомых пружинах, как показано на рисунке. Расстояние между точкой подвеса верхней пружины и точкой опоры расположенной под ней нижней пружины в точности равно сумме толщины балки и удвоенной длины недеформированной пружины. Расстояния, указанные на рисунке: $L_1 = 20$см, $L_2 = 60$см, $L_3 = 50$см. К левому концу балки подвешен груз массой m_1, а к правому – $m_2 = 2$ кг. Чему равна масса груза m_1, если балка строго горизонтальна?

Возможное решение:
Запишем проекцию баланса сил на вертикальную ось и баланс моментов сил относительно левого конца балки. Пусть T_1 – сила упругости, действующая со стороны левой нижней пружины, T_2 – со стороны правой нижней пружины, T_3 – со стороны верхней пружины.

$$\begin{cases} (M + m_1 + m_2)g - T_3 = T_1 + T_2 \\ m_2 g(L_1 + L_2 + L_3) + Mg\dfrac{L_1 + L_2 + L_3}{2} - T_1 L_1 - T_2(L_1 + L_2) - T_3 L_1 = 0 \end{cases}$$

По условию задачи балка строго горизонтальна, значит две нижние пружины сжаты одинаково. Так как пружины одинаковы, $T_1 = T_2$. Пружина 1 будет сжата настолько же, насколько растянута пружина 3. Значит $T_1 = T_3$. Обозначим $T = T_1 = T_2 = T_3$. Тогда

$$\begin{cases} T = \dfrac{1}{3}(M + m_1 + m_2)g \\ m_2 g(L_1 + L_2 + L_3) + Mg\dfrac{L_1 + L_2 + L_3}{2} - T(3L_1 + L_2) = 0 \end{cases}$$

Подставим первое уравнение во второе

$$(M + m_1 + m_2)(3L_1 + L_2) = 3m_2(L_1 + L_2 + L_3) + 3M\frac{L_1 + L_2 + L_3}{2}$$

Отсюда искомая масса m_1

$$m_1 = m_2\frac{2L_2 + 3L_3}{3L_1 + L_2} + \frac{M}{2}\frac{3L_3 - 3L_1 + L_2}{3L_1 + L_2}$$

Подставив значения, получим численный ответ

$$m_1 = 7 \text{ кг}$$

Критерии оценивания:

Баланс сил по вертикали.	6
Баланс моментов относительно любой удобной оси.	6
Равенство сил упругости нижних пружин.	4
Равенство сил упругости верней и нижней пружины с левой стороны.	4
Найдена искомая масса.	5

Задача 2. (25 б.)
Опишем известный способ обмана на электронных весах. К корпусу весов с помощью скотча прикрепляется прозрачный пакет. На первый взгляд, пакет служит для защиты весов от возможного загрязнения. Весы с лежащим на них свободно пакетом откалиброваны на 0. Перед взвешиванием нечестный продавец проглаживает пакет в направлении от линии крепления, и, не убирая руку, кладет товар. Затем продавец медленно снимает руку, и на электронном табло высвечивается «масса» товара, исходя из которой он рассчитывает стоимость. Коэффициент трения между пакетом и весами 0.1, коэффициент трения между товаром и пакетом варьируется от 0.2 до 0.5. Объясните, почему весы показывают больше, чем масса товара. На какую максимальную сумму может быть обманут покупатель, заплативший за «1 кг» колбасы стоимостью 600 р/кг?
P.S. Будьте бдительны!

Возможное решение:
Кроме веса товара, на весы действует сила натяжения пакета. За счет этого показания электронных весов увеличиваются.
Вычислим показания весов P', если масса товара равна m.
Между товаром и пакетом, и между пакетом и весами действует сила трения покоя. В начале взвешивания пакет натянут и товар вместе с пакетом немного смещается под действием силы упругости. Когда сила упругости становится равной силе трения скольжения на товар, он может остановиться. Так как продавец убирает руку медленно, и своей рукой может компенсировать избыточную силу упругости, движения товара по инерции практически не происходит.
Коэффициент трения между товаром и пакетом выше, чем между пакетом и весами. За счет этого товар уже останавливается относительно пакета на момент достижения положения равновесия. Сила трения покоя пакета о весы оказывается равной максимальному своему значению μN, где N сила реакции опоры, μ коэффициент трения пакета о весы. Из условия равновесия по вертикали

$$N = mg;$$

Край весов, подобно неподвижному блоку*, перенаправляет силу натяжения пакета в вертикаль. Таким образом, на весы действуют две силы, направленные вниз: вес товара и сила натяжения пакета T

$$T = \mu mg;$$

$$P' = T + mg = \mu mg + mg = mg(1 + \mu);$$

Покупатель заплатил за 1 кг колбасы, но на самом деле масса колбасы равна

$$m' = \frac{1000 \text{ г}}{1 + \mu} = 909\text{г}$$

Честная цена за такую массу

$$\frac{600 \text{ р}}{1 + \mu} \approx 545 \text{ р}$$

Таким образом, покупатель был обманут на 55 р.

*Если быть более точными, блоку с сухим трением. В зависимости от формы края ответ может немного измениться. Предполагая, что пакет на краю весов перегибается на 90 градусов, величины T и μmg могут отличаться примерно на $\mu mg\left(\exp\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) - 1\right)$. Учитывая небольшую величину коэффициента трения в данном случае $\mu mg\left(\exp\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) - 1\right) \approx \frac{\pi\mu^2}{2}mg$, что приводит к дополнительной разнице около 1,5%. Этот эффект выходит за рамки школьной программы и его, разумеется, можно не учитывать.

Критерии оценивания:

Идея о сложении силы натяжения пакета с весом товара и качественное объяснение.	13
Баланс сил по вертикали.	2
Равенство или примерное равенство сил натяжения и силы трения.	4
Связь массы товара и показаний весов.	3
Найдено численное значение переплаты.	3

Задача 3. (25 б.)

В цилиндрической бочке, заполненной водой, плавает однородный брусок. Уровень воды в бочке при этом равен H_0. В первом случае на брусок сверху поставили груз массой m_1, уровень воды в бочке изменился на величину $\Delta H_1 = H_1 - H_0$. Во втором случае на брусок сверху поставили груз массой m_2, уровень воды в бочке изменился на величину $\Delta H_2 = H_2 - H_0$ относительно изначального. В обоих случаях брусок не погружался в воду полностью. Известно, что $\frac{\Delta H_2}{\Delta H_1} = \gamma$.

1) Найдите $\frac{m_2}{m_1}$ (рекомендуется начать с этого пункта). Ответ выразить только через величину γ.
2) Найдите отношение погруженного объема бруска во втором случае к погруженному объему бруска в первом случае $\frac{V_2}{V_1}$, если $\frac{M}{m_1} = \beta$, где M – масса бруска. Ответ выразить только через величины γ и β.
3) По результатам, полученным в первых двух пунктах, вычислите значения $\frac{m_2}{m_1}$ и $\frac{V_2}{V_1}$ для $\beta = 4$, $\gamma = 2$.

Возможное решение:

1) Второй закон Ньютона удобнее будет сначала записать для общего случая, когда на брусок поставлен груз некоторой массы m, а затем вместо m подставить массы $m = 0$ (свободный брусок), $m = m_1$, $m = m_2$, получив необходимые выражения.

   На систему из бруска и груза будет действовать сила тяжести (вниз) и сила Архимеда, выталкивающая брусок из воды (вверх). Второй закон Ньютона будет иметь вид
$$(M + m)a = (M + m)g - \rho_в g V_п$$
   где $\rho_в$ – плотность воды, $V_п$ – погруженный объем бруска.

   Приравняв ускорение к нулю, получим уравнение для состояния равновесия
$$(M + m) = \rho_в V_п$$
   Для цилиндрической бочки справедливо равенство
$$SH = V_п + V_в$$
   где H – уровень воды, S – площадь дна бочки, $V_в$ – объем воды в бочке.

   Отсюда получим выражение для уровня воды
$$H = \frac{1}{S}\left(\frac{M + m}{\rho_в} + V_в\right)$$
   Тогда для случая свободного бруска
$$H_0 = \frac{1}{S}\left(\frac{M}{\rho_в} + V_в\right)$$
   Для первого случая
$$H_1 = \frac{1}{S}\left(\frac{M + m_1}{\rho_в} + V_в\right)$$
   Для второго случая
$$H_2 = \frac{1}{S}\left(\frac{M + m_2}{\rho_в} + V_в\right)$$
   Изменения уровня воды относительно изначального
$$\Delta H_1 = \frac{m_1}{\rho_в S}$$
$$\Delta H_2 = \frac{m_2}{\rho_в S}$$
   Отсюда получим
$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\Delta H_2}{\Delta H_1}$$
   Окончательный ответ
$$\frac{m_2}{m_1} = \gamma$$

2) Из первого пункта знаем
$$(M + m) = \rho_в V_п$$

Тогда для погруженных объемов в двух случаях будем иметь

$$V_1 = \frac{M + m_1}{\rho_в}$$

$$V_2 = \frac{M + m_2}{\rho_в}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{M + m_2}{M + m_1}$$

Преобразуем выражение

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{M}{m_1} + \frac{m_2}{m_1}}{\frac{M}{m_1} + 1}$$

По условию $\frac{M}{m_1} = \beta$. Из первого пункта знаем $\frac{m_2}{m_1} = \gamma$. Получим ответ:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\beta + \gamma}{\beta + 1}$$

3) Подставим $\beta = 4, \gamma = 2$ в выражения, полученные в первых двух пунктах

$$\frac{m_2}{m_1} = 2$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{6}{5} = 1{,}2$$

Критерии оценивания:

Баланс сил по вертикали для бруска.	4
Уровень воды в бочке выражен через погруженный объем бруска.	5
Уровень воды записан для трех случаев (либо два случая изменения уровня)	6
Вычислено соотношение масс.	4
Найдено отношение объемов $\frac{V_2}{V_1}$.	4
Получены верные численные значения.	2

Задача 4. (25 б.)

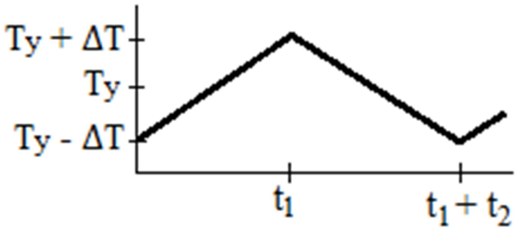
Для нагрева воздуха в помещении (далее - внешняя или окружающая среда) используют масляный обогреватель. Масляный обогреватель оснащен терморегулятором релейного типа, который работает следующим образом: при падении температуры масла ниже заданной температуры $T_у$ (называемой температурой уставки) на небольшую величину ΔT (то есть температура масла равна $T_у - \Delta T$), нагреватель включается, идет нагрев. Когда температура масла достигает величины $T_у + \Delta T$, нагреватель отключается, масло остывает. Далее процесс повторяется. Температура включенного нагревателя $T_н > T_у + \Delta T$. Площадь нагревателя $S_н$, его коэффициент теплоотдачи $\alpha_н$. Площадь теплоотдачи обогревателя во внешнюю среду $S_в$, соответствующий коэффициент теплоотдачи $\alpha_в$. Рабочий объем обогревателя заполнен маслом, масса которого m, а удельная теплоемкость c. Теплоемкостью корпуса пренебречь. Температура окружающей среды $T_в < T_у - \Delta T$, на обогревателе выставлена температура уставки $T_у$. Считать, что $\Delta T \ll T_н - T_у, T_у - T_в$.

Найдите период между включениями терморегулятора (от включения до следующего включения нагревателя) в установившемся режиме работы прибора.

Для простоты считать нагреватель идеальным (мгновенно нагревающимся и остывающим), теплопроводность масла высокой (температура масла во всех точках объема одинакова).

Возможное решение:

В установившемся режиме работы обогревателя температура масла в течение некоторого времени t_1 будет расти от величины $T_у - \Delta T$ до величины $T_у + \Delta T$. Затем в течение некоторого времени t_2 будет падать от величины $T_у + \Delta T$ до величины $T_у - \Delta T$. Далее процесс будет повторяться. Период θ работы терморегулятора будет равен сумме времен t_1 и t_2.



Найдем t_1 и t_2. Для этого запишем соотношения для скоростей теплообмена.
С одной стороны, скорость нагрева масла в течение времени t_1 равна количеству теплоты, полученному маслом за время t_1

$$\frac{\Delta Q_1}{t_1} = cm\frac{2\Delta T}{t_1}$$

С другой стороны, она равна разности скоростей теплопередачи от нагревателя маслу и от масла окружающей среде. Эти скорости, согласно закону Ньютона-Рихмана, пропорциональны разности температур нагревателя и масла, масла и окружающей среды соответственно. В силу малости ΔT в течение времени t_1 эти скорости практически не будут изменяться, температура будет изменяться практически линейно. Их можно считать приблизительно пропорциональными $T_н - T_у$ и $T_у - T_в$ соответственно. Тогда с учетом закона Ньютона-Рихмана можем записать

$$\frac{\Delta Q_1}{t_1} = \alpha_н S_н (T_н - T_у) - \alpha_в S_в (T_у - T_в)$$

Приравняв полученные скорости нагрева, найдем t_1

$$t_1 = \frac{2cm\Delta T}{\alpha_н S_н (T_н - T_у) - \alpha_в S_в (T_у - T_в)}$$

Рассуждая аналогично, можем записать соотношение для t_2 с той разницей, что в этом случае нагреватель не будет участвовать в процессе, а количество теплоты, получаемое маслом за время t_2 будет отрицательным, так как масло остывает.

$$-cm\frac{2\Delta T}{t_2} = -\alpha_в S_в (T_у - T_в)$$

Тогда время t_2

$$t_2 = \frac{2cm\Delta T}{\alpha_в S_в (T_у - T_в)}$$

Искомый период $\theta = t_1 + t_2$ будет равен

$$\theta = 2cm\Delta T\left(\frac{1}{\alpha_н S_н (T_н - T_у) - \alpha_в S_в (T_у - T_в)} + \frac{1}{\alpha_в S_в (T_у - T_в)}\right)$$

Или

$$\theta = 2cm\Delta T\frac{\alpha_н S_н (T_н - T_у)}{\left(\alpha_н S_н (T_н - T_у) - \alpha_в S_в (T_у - T_в)\right)\alpha_в S_в (T_у - T_в)}$$

Критерии оценивания:

Тепловой баланс для масла внутри обогревателя.	6
Закон Ньютона-Рихмана для теплообмена масла с окружающей средой.	6
Найдено время нагрева.	6
Найдено время остывания.	5
Записан искомый период.	2