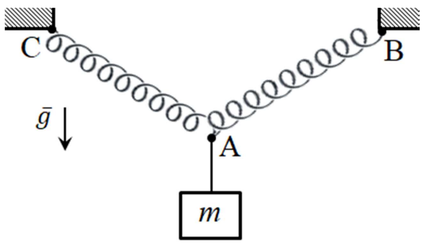
Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Физика»
заключительный этап
2023/24 учебный год
9 класс
Разбор задач.

Пояснения к критериям оценивания.

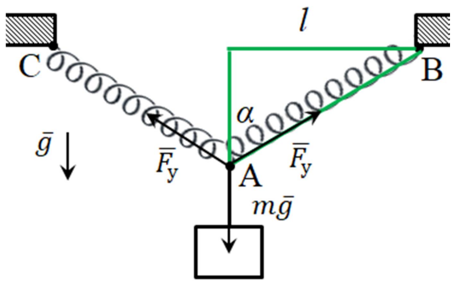
*Для получения полного балла по каждому пункту критериев в решении должен присутствовать закон, уравнение, неравенство, идея или прием, подходящий **конкретно** к данной задаче и записанный **верно**. При наличии общей формулировки или ошибки по данному пункту выставляется балл меньше максимального, включая 0 баллов. Решения далекие от авторского оцениваются вне критериев.*

Задача 1. (20 б.) Две идентичные невесомые идеальные пружины соединены последовательно и растянуты между горизонтально расположенной парой неподвижных точек B и C. В точках соединения пружины могут свободно поворачиваться на любой угол. Если к пружинам в точке соединения A подвесить груз массой 1 кг, угол CAB окажется равным 120^0 (см. Рисунок). Если подвесить груз массой 5 кг, угол CAB окажется прямым. Какой груз нужно подвесить к точке A, чтобы треугольник ABC был равносторонним?



Возможное решение:

Запишем баланс сил для точки A в проекции на вертикальную ось



$$mg = 2\cos\alpha k\Delta l$$
$$mg = 2\,k\cos\alpha\left(\frac{l}{\sin\alpha} - l_0\right)$$

Угол α принимает значение $\alpha_1 = 60^0$, $\alpha_2 = 45^0$ и $\alpha_3 = 30^0$ соответственно. Массы $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 5$ кг и m_3 искомая масса. l_0 – длина недеформированной пружины.

$$\frac{m_1 g}{2\cos\alpha_1} = \left(\frac{l}{\sin\alpha_1} - l_0\right)k$$
$$\frac{m_2 g}{2\cos\alpha_2} = \left(\frac{l}{\sin\alpha_2} - l_0\right)k$$
$$\frac{g}{2}\left(\frac{m_1}{\cos\alpha_1} - \frac{m_2}{\cos\alpha_2}\right) = kl\left(\frac{1}{\sin\alpha_1} - \frac{1}{\sin\alpha_2}\right)$$
$$kl = \frac{g\left(\frac{m_1}{\cos\alpha_1} - \frac{m_2}{\cos\alpha_2}\right)}{2\left(\frac{1}{\sin\alpha_1} - \frac{1}{\sin\alpha_2}\right)}$$

Далее можно определить величину kl_0, либо написать подобное уравнение для m_2 и m_3 и выразить m_3. Покажем 1 путь.

$$2\cos\alpha_1\,kl_0 = \frac{2\cos\alpha_1\,kl}{\sin\alpha_1} - m_1 g$$

$$kl_0 = \frac{kl}{\sin\alpha_1} - \frac{m_1 g}{2\cos\alpha_1}$$
$$m_3 = \frac{2\cos\alpha_3}{g}\left(kl\left(\frac{1}{\sin\alpha_3} - \frac{1}{\sin\alpha_1}\right) + \frac{m_1 g}{2\cos\alpha_1}\right)$$

2 путь

$$\frac{g}{2}\left(\frac{m_3}{\cos\alpha_3}-\frac{m_1}{\cos\alpha_1}\right)=kl\left(\frac{1}{\sin\alpha_3}-\frac{1}{\sin\alpha_1}\right)$$
$$m_3=\frac{2kl\cos\alpha_3}{g}\left(\frac{1}{\sin\alpha_3}-\frac{1}{\sin\alpha_1}\right)+\frac{m_1\cos\alpha_3}{\cos\alpha_1}\approx 16\text{кг}$$

Критерии оценивания:

Баланс сил по вертикали.	4
Удлинение выражено через геометрические размеры системы.	4
Из условий баланса сил по вертикали в разных случаях составлена система уравнений, позволяющая определить неизвестные параметры системы.	6
Найдено выражение для искомой массы (не обязательно, если ответ верен засчитывается автоматически).	4
Численное значение искомой массы.	2

Задача 2. (20 б.) В цилиндрической бочке, заполненной водой, плавает однородный брусок. Уровень воды в бочке при этом равен H_0. В первом случае на брусок сверху поставили груз массой m_1, уровень воды в бочке изменился на величину $\Delta H_1 = H_1 - H_0$. Во втором случае на брусок сверху поставили груз массой m_2, уровень воды в бочке изменился на величину $\Delta H_2 = H_2 - H_0$ относительно изначального. В обоих случаях брусок не погружался в воду полностью. Известно, что $\frac{\Delta H_2}{\Delta H_1} = \gamma$.

1) Найдите $\frac{m_2}{m_1}$ (рекомендуется начать с этого пункта). Ответ выразить только через величину γ.

2) Найдите отношение погруженного объема бруска во втором случае к погруженному объему бруска в первом случае $\frac{V_2}{V_1}$, если $\frac{M}{m_1} = \beta$, где M – масса бруска. Ответ выразить только через величины γ и β.

3) По результатам, полученным в первых двух пунктах, вычислите значения $\frac{m_2}{m_1}$ и $\frac{V_2}{V_1}$ для $\beta = 4$, $\gamma = 2$.

Возможное решение:

1) Второй закон Ньютона удобнее будет сначала записать для общего случая, когда на брусок поставлен груз некоторой массы m, а затем вместо m подставить массы $m = 0$ (свободный брусок), $m = m_1$, $m = m_2$, получив необходимые выражения.
   На систему из бруска и груза будет действовать сила тяжести (вниз) и сила Архимеда, выталкивающая брусок из воды (вверх). Второй закон Ньютона будет иметь вид
   $$(M+m)a = (M+m)g - \rho_\text{в} g V_\text{п}$$
   где $\rho_\text{в}$ – плотность воды, $V_\text{п}$ – погруженный объем бруска.
   Приравняв ускорение к нулю, получим уравнение для состояния равновесия
   $$(M+m) = \rho_\text{в} V_\text{п}$$
   Для цилиндрической бочки справедливо равенство
   $$SH = V_\text{п} + V_\text{в}$$
   где H – уровень воды, S – площадь дна бочки, $V_\text{в}$ – объем воды в бочке.
   Отсюда получим выражение для уровня воды
   $$H = \frac{1}{S}\left(\frac{M+m}{\rho_\text{в}} + V_\text{в}\right)$$
   Тогда для случая свободного бруска
   $$H_0 = \frac{1}{S}\left(\frac{M}{\rho_\text{в}} + V_\text{в}\right)$$
   Для первого случая
   $$H_1 = \frac{1}{S}\left(\frac{M+m_1}{\rho_\text{в}} + V_\text{в}\right)$$
   Для второго случая

$$H_2 = \frac{1}{S}\left(\frac{M + m_2}{\rho_\text{в}} + V_\text{в}\right)$$

Изменения уровня воды относительно изначального

$$\Delta H_1 = \frac{m_1}{\rho_\text{в} S}$$

$$\Delta H_2 = \frac{m_2}{\rho_\text{в} S}$$

Отсюда получим

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\Delta H_2}{\Delta H_1}$$

Окончательный ответ

$$\frac{m_2}{m_1} = \gamma$$

2) Из первого пункта знаем

$$(M + m) = \rho_\text{в} V_\text{п}$$

Тогда для погруженных объемов в двух случаях будем иметь

$$V_1 = \frac{M + m_1}{\rho_\text{в}}$$

$$V_2 = \frac{M + m_2}{\rho_\text{в}}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{M + m_2}{M + m_1}$$

Преобразуем выражение

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{M}{m_1} + \frac{m_2}{m_1}}{\frac{M}{m_1} + 1}$$

По условию $\frac{M}{m_1} = \beta$. Из первого пункта знаем $\frac{m_2}{m_1} = \gamma$. Получим ответ:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\beta + \gamma}{\beta + 1}$$

3) Подставим $\beta = 4, \gamma = 2$ в выражения, полученные в первых двух пунктах

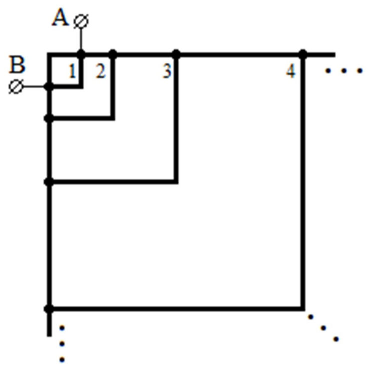
$$\frac{m_2}{m_1} = 2$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{6}{5} = 1{,}2$$

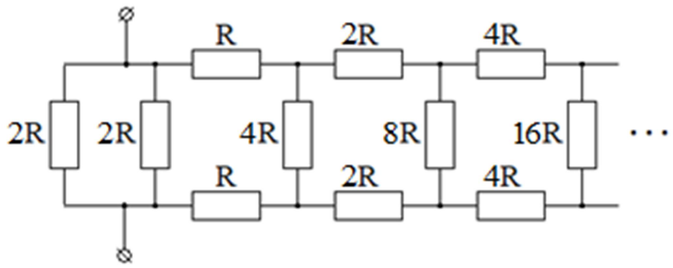
Критерии оценивания:

Баланс сил по вертикали для бруска.	3
Уровень воды в бочке выражен через погруженный объем бруска.	4
Уровень воды записан для трех случаев (либо два случая изменения уровня).	4
Вычислено соотношение масс.	4
Найдено отношение объемов $\frac{V_2}{V_1}$.	3
Получены верные численные значения.	2

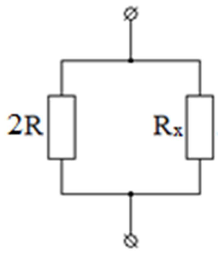
Задача 3. (20 б.) Найти сопротивление между точками A и B конструкции, состоящей из однородного провода, представленной на рисунке. Конструкция состоит из бесконечного числа квадратов различной площади. Квадраты пронумерованы на рисунке. Площадь каждого i-го квадрата в 4 раза больше площади (i–1)-го квадрата. Сопротивление стороны наименьшего квадрата (№1 на рисунке) R.



Возможное решение:
Площадь квадрата на каждом шаге увеличивается в 4 раза, следовательно, сторона квадрата увеличивается в 2 раза.
Нарисуем эквивалентную схему:



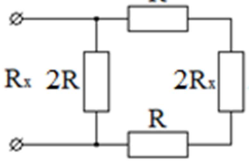
Выделим две параллельные ветви. Одна из них соответствует общему сопротивлению левой и верхней сторон наименьшего квадрата, она будет иметь сопротивление $2R$. Другая будет соответствовать рекурсивной бесконечной части фигуры. Введем для нее эквивалентное сопротивление и обозначим его R_x.
Перерисуем схему:



Сопротивление этой цепи:

$$R_{AB} = \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{R_x}}$$

Найдем R_x. Так как ветвь цепи бесконечна, если «убрать» из нее одно звено, цепь перейдет в подобную цепь. Единственное различие с исходной – увеличение номинала каждого из резисторов в 2 раза. Это приводит к увеличению сопротивления всей цепи в 2 раза. Тогда можем нарисовать схему ветви цепи с сопротивлением R_x следующим образом:



Отсюда можем получить рекурсивное соотношение:

$$R_x = \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R + 2R_x}}$$

Преобразуем его и получим уравнение на R_x

$$R_x^2 = 2R^2$$

Отсюда

$$R_x = \sqrt{2}R$$

Подставив R_x в выражение для R_{AB}, окончательно получим

$$R_{AB} = 2(\sqrt{2} - 1)R \approx 0.83R$$

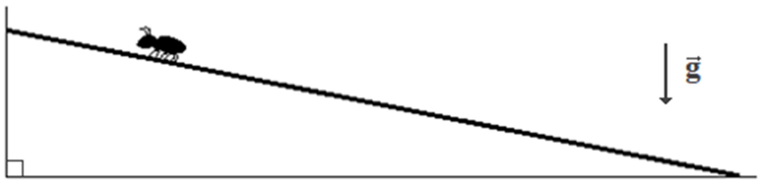
Эквивалентным ответом является

$$R_{AB} = \frac{2(\sqrt{2} + 1)R}{3 + 2\sqrt{2}} \approx 0.83R$$

Критерии оценивания:

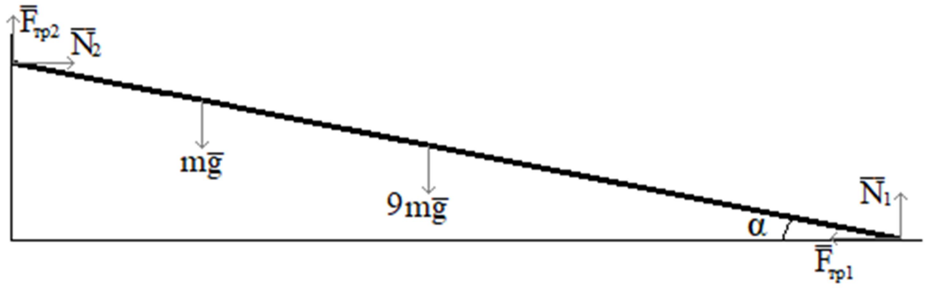
Изображена эквивалентная схема (не обязательно, засчитывается автоматически, если последующие три шага правильные)	3
Выделена «бесконечная» часть цепи	3
Идея об удвоении сопротивления при удалении первого звена «бесконечной» цепи.	4
Рекурсивная эквивалентная схема.	4
Найдено сопротивление «бесконечной» цепи.	4
Найдено общее сопротивление.	2

Задача 4. (20 б.) Длинная тонкая однородная прямая палочка стоит в углу, образованном деревом и поверхностью земли. Коэффициент трения между деревом и палочкой $\mu = \frac{5}{19}$, а коэффициент трения между палочкой и землей $2\mu = \frac{10}{19}$. По палочке вверх ползет муравей массой в 9 раз меньшей массы палочки. Когда он прополз 75% пути, палочка начала соскальзывать вниз. Под каким углом к поверхности земли изначально стояла палочка?



Возможное решение:

Пусть масса муравья равна m, тогда масса палочки равна $9m$. Расставим силы, действующие на палочку



Необходимым условием нахождения твердого тела в состоянии равновесия является равенство нулю векторной суммы сил, а также моментов сил, приложенных к телу. Запишем условие равновесия сил в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси

$$\begin{cases} N_2 - 2\mu N_1 = 0 \\ N_1 + \mu N_2 = 10mg \end{cases}$$

Отсюда найдем выражения для сил реакции опоры

$$\begin{cases} N_1 = \dfrac{10mg}{1 + 2\mu^2} \\ N_2 = \dfrac{20\mu mg}{1 + 2\mu^2} \end{cases}$$

Запишем условие моментов относительно нижнего конца палочки. Пусть искомый угол между палочкой и поверхностью земли равен α, а длина палочки L. Тогда точка приложения веса муравья находится на расстоянии $\frac{3L}{4}$ от точки опоры.

$$9mg\frac{L}{2}\cos\alpha + mg\frac{3L}{4}\cos\alpha - N_2 L\sin\alpha - \mu N_2 L\cos\alpha = 0$$

С учетом выражения для N_2 получим

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{21 - 38\mu^2}{80\mu}$$

Или

$$\alpha = \mathrm{arctg}\frac{21 - 38\mu^2}{80\mu}$$

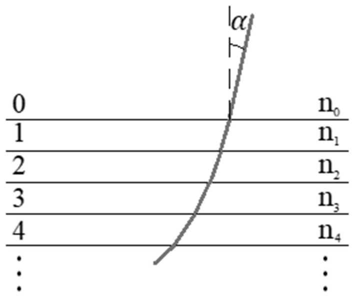
Подставив $\mu = \frac{5}{19}$, получим окончательный ответ

$$\alpha = \mathrm{arctg}\frac{349}{400} \approx 41°$$

Критерии оценивания:

Баланс сил по вертикали.	4
Баланс сил по горизонтали.	4
Сила трения выражена через нормальную реакцию опоры.	2
Баланс моментов относительно любой удобной оси.	6
Из полученной системы найден искомый угол или его тангенс.	4

Задача 5. (20 б.) Световой луч проходит через систему, состоящую из прозрачных плоских параллельных слоев. Он падает из начальной среды (пронумерованной как 0) под углом α от перпендикуляра в первый слой. Показатели преломления слоев различны. Для них справедливо рекуррентное соотношение $n_i = \gamma n_{i-1}$, причем $\gamma < 1$. В какой по счету слой луч не сможет проникнуть? Предполагается, что n_0 достаточно велик, чтобы показатель преломления в этом слое был больше 1. Дайте ответ для $\alpha = 30°$, $\gamma = 2^{-0,12}$.



Возможное решение:

Луч не сможет проникнуть в тот слой, при падении на границу которого произойдет его полное внутреннее отражение. В одном из слоев оно произойдет, поскольку по условиям задачи показатель преломления убывает при переходе в каждый следующий слой ($n_i = \gamma n_{i-1}$, $\gamma < 1$). На каждом шаге происходит переход луча в среду с меньшим показателем преломления, угол падения в $i+1$-й слой при каждом переходе из $i-1$-го слоя в i -й увеличивается.

Пусть луч полностью отразится от слоя с порядковым номером N. Тогда условие полного внутреннего отражения примет вид

$$\sin\alpha_{N-1} > \frac{n_N}{n_{N-1}}$$

Но $\frac{n_N}{n_{N-1}} = \gamma$ по условиям задачи, поэтому

$$\sin\alpha_{N-1} > \gamma$$

Найдем $\sin\alpha_{N-1}$. Для этого запишем закон преломления для первых N слоев

$$\sin\alpha = \frac{n_1}{n_0}\sin\alpha_1, \sin\alpha_1 = \frac{n_2}{n_1}\sin\alpha_2, \ldots, \sin\alpha_{N-1} = \frac{n_N}{n_{N-1}}\sin\alpha_N$$

С учетом $\frac{n_i}{n_{i-1}} = \gamma$

$$\sin\alpha = \gamma\sin\alpha_1, \sin\alpha_1 = \gamma\sin\alpha_2, \ldots, \sin\alpha_{N-1} = \gamma\sin\alpha_N$$

Подставляя каждое последующее выражение в предыдущее, будем иметь

$$\sin\alpha = \gamma^{N-1}\sin\alpha_{N-1}$$

Тогда условие полного внутреннего отражения в $N-1$-м слое примет вид

$$\gamma^{1-N}\sin\alpha > \gamma$$

Или

$$\gamma^N < \sin\alpha$$

Таким образом, порядковый номер слоя, при падении на границу которого произойдет полное внутреннее отражение, будет равен наименьшему целому числу N, для которого выполняется условие $\gamma^N < \sin\alpha$. Если $\gamma^N = \sin\alpha$, то луч, дойдя до границы слоя с номером N, уйдет под углом 90° к перпендикуляру.

Для $\alpha = 30°$, $\gamma = 2^{-0,12}$ будем иметь

$$2^{-0,12} \quad < \sin 30°$$

Или

$$2^{-\frac{3}{25}N} < 2^{-1}$$

$$\frac{3}{25}N > 1$$

$$N > 8\frac{1}{3}$$

Искомый номер слоя равен наименьшему целому N, которое удовлетворяет полученному неравенству

$$N = 9$$

Критерии оценивания:

Присутствует качественное описание явления (засчитывается автоматически, если ход решения верный или содержит только вычислительные ошибки).	4
Записано условие ПВО.	4
Связь угла падения в 0 и *N*-1 слое.	4
Записано неравенство для *N*.	4
Найден *N*.	4