Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2024

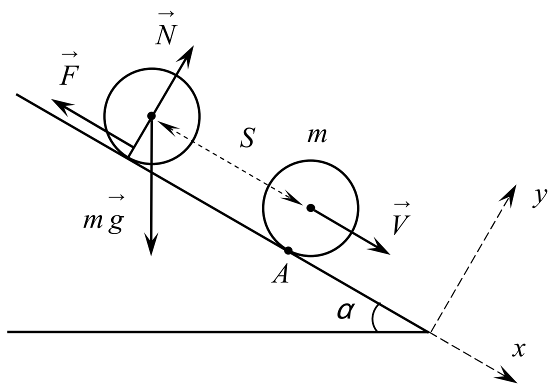
Заключительный этап 6 апреля 11 класс

Задача 1. Тонкий обруч, масса которого равномерно распределена по его длине, поставили на шероховатую наклонную плоскость и отпустили без толчка. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30°$. Считая, что обруч скатывается без проскальзывания, найдите следующие величины:

1. Ускорение a центра обруча.
2. Минимальное значение коэффициента трения μ между обручем и плоскостью, при котором возможно движение без поскальзывания.

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

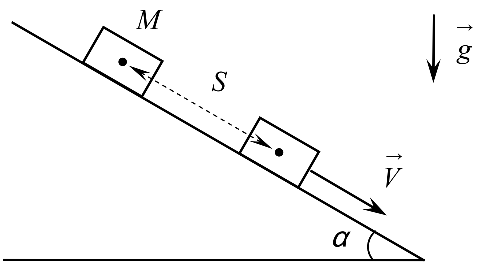
Возможное решение



1. Обозначим через m массу обруча. На обруч действуют сила тяжести $m\overrightarrow{g}$, сила $\overrightarrow{N}$ нормальной реакции наклонной плоскости и сила трения $\overrightarrow{F}$. При движении без проскальзывания мгновенная скорость $\overrightarrow{V_A}$ точки A, в которой обруч касается плоскости, равна нулю. В этом случае $\overrightarrow{F}$ является силой трения покоя. Её мгновенная мощность, равная скаляльному произведению $\overrightarrow{F}\,\overrightarrow{V_A}$ обращается в нуль. Поэтому сила $\overrightarrow{F}$ не совершает работу и механическая энергия обруча сохраняется. Сохранение механической энергии можно обосновать по-другому, сказав, что если в точке A нет проскальзывания, то там не выделяется тепло.

Пусть центр обруча прошёл расстояние S вдоль наклонной плоскости. Его перемещение по вертикали равно $H = S\sin\alpha$. Скорость центра в этот момент обозначим через V. Воспользуемся известным фактом, что кинетическая энергия обруча, катящегося без проскальзывания, равна mV^2. Элементарное доказательство этого утверждения приведено, например, на официальном сайте олимпиады "Курчатов" (заключительный этап 2022 года, задача 2 для 11 класса). По закону сохранения энергии имеем:

$$mgH = mV^2 \quad \longrightarrow \quad V^2 = g\,S\sin\alpha\,.$$



Рассмотрим теперь вспомогательную задачу. Брусок массой M соскальзывает из состояния покоя по гладкой плоскости, наклонённой к горизонту под углом α. Хорошо известно, что брусок движется с постоянным ускорением

$$a = g\,\sin\alpha\,.$$

Предположим, что брусок прошёл расстояние S вдоль наклонной плоскости, опустившись по вертикали на высоту $H = S\,\sin\alpha$ и разогнавшись до скорости V. Имеем:

$$MgH = \frac{M\,V^2}{2} \quad\longrightarrow\quad V^2 = 2g\,S\sin\alpha\,.$$

Как видно, выражение для квадрата скорости центра обруча получается отсюда заменой $g \to g/2$. Сделав такую замену в формуле для ускорения бруска, находим ускорение центра обруча:

$$a = \frac{g\,\sin\alpha}{2} = 2{,}5\ \text{м/с}^2\,.$$

Этот результат можно получить по-другому, воспользовавшись тем фактом, что линейная зависимость V^2 от S характерна для равноускоренного движения. Полагая $V = a\,t$ и $S = a\,t^2/2$, получаем:

$$a^2\,t^2 = \frac{a\,t^2}{2}\,g\,\sin\alpha \quad\longrightarrow\quad a = \frac{g\,\sin\alpha}{2}\,.$$

2. Запишем для обруча уравнение второго закона Ньютона в системе отсчёта, связанной с наклонной плоскостью:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}\,.$$

Направим ось x вдоль ускорения центра обруча, а ось y перпендикулярно плоскости вверх. В проекциях на эти оси имеем:

$$ma = mg\,\sin\alpha - F\,, \qquad 0 = N - mg\,\cos\alpha\,.$$

Выразим отсюда силы F и N:

$$F = mg\,\sin\alpha - ma = \frac{mg\,\sin\alpha}{2}\,, \qquad N = mg\,\cos\alpha\,.$$

Сила трения покоя удовлетворяет неравенству:

$$F \le \mu N\,.$$

Отсюда получаем значения коэффициента трения, при которых обруч будет скатываться без проскальзывания:

$$\frac{mg\,\sin\alpha}{2} \le \mu mg\,\cos\alpha \quad\longrightarrow\quad \mu \ge \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}\,.$$

Минимальное значение μ равно:

$$\mu = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0{,}29\,.$$

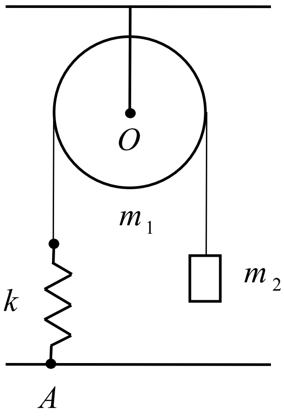
Ответ:

$$a = \frac{g\,\sin\alpha}{2} = 2{,}5\ \text{м/с}^2\,, \qquad \mu = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0{,}29\,.$$

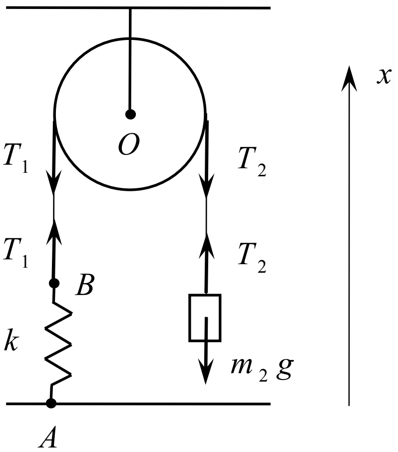
Критерии

1. Правильно указаны силы, действующие на обруч (+1 балл).
2. Дано обоснование сохранения механической энергии обруча (+1 балл).
3. Правильно записана кинетическая энергия обруча (+2 балла).
4. Правильно записан закон сохранения энергии (+1 балл).
5. Получены правильные буквенный и числовой ответы для ускорения (+1 балл).
6. Правильно записано уравнение второго закона Ньютона (+1 балл).
7. Правильно найдены силы трения и нормальной реакции (+1 балл).
8. Получено правильное неравенство для коэффициента трения (+1 балл).
9. Получены правильные буквенный и числовой ответы для минимального коэффициента трения (+1 балл).

Задача 2. К потолку прикреплён блок в виде тонкого обруча с невесомыми спицами. Масса обруча $m_1 = 1{,}5$ кг равномерно распределена по его длине. Обруч может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр O. Через обруч переброшена невесомая и нерастяжимая нить, к правому концу которой подвешен груз массой $m_2 = 0{,}5$ кг. Левый конец нити привязан к невесомой вертикальной пружине, закреплённой на полу в точке A. Жёсткость пружины $k = 50$ Н/м. Считая, что при движении нить не скользит по обручу, найдите период T малых вертикальных колебаний груза около положения равновесия.



Возможное решение



1. Найдём удлинение пружины x_p в положении равновесия. Обозначим через T_1 и T_2 силы натяжения левого и правого вертикальных участков нити. В положении равновесия имеем:

$$T_1 = k\,x_p\,, \qquad T_2 = m_2 g\,.$$

Так как обруч не вращается, $T_1 = T_2$. Получаем:

$$k\,x_p = m_2 g \quad \longrightarrow \quad x_p = \frac{m_2 g}{k}\,.$$

2. Выведем систему из положения равновесия. Например, сместим точку B, в которой нить прикреплена к пружине, вниз на расстояние x_0 и отпустим без толчка. Величина x_0 предполагается малой по сравнению с x_p, так что при дальнейшем движении пружина остаётся растянутой и силы натяжения нити не обращаются в нуль. Начальное удлинение пружины равно $(\,x_p - x_0\,)$. Потенциальную энергию груза в поле тяжести примем за нуль в положении равновесия. Учитывая, что при смещении точки B вниз на расстояние x_0 груз поднимается на такое же расстояние вверх, запишем начальную энергию системы:

$$E_0 = \frac{k\,(\,x_p - x_0\,)^2}{2} + m_2 g x_0 = \frac{k\,x_p^2}{2} - k\,x_p\,x_0 + \frac{k\,x_0^2}{2} + m_2 g x_0\,.$$

Здесь имеем:

$$-k\,x_p\,x_0 + m_2 g x_0 = -k\,\frac{m_2 g}{k}\,x_0 + m_2 g x_0 = 0\,.$$

Получаем:

$$E_0 = \frac{k\,x_p^2}{2} + \frac{k\,x_0^2}{2}\,.$$

Запишем теперь энергию системы E в некотором произвольном положении. Направим ось x вертикально вверх и будем отсчитывать координату груза x от положения равновесия. Удлинение пружины равно $(\,x_p - x\,)$. Обозначим скорость груза через V. Поскольку нить не скользит по обручу, скорости всех его точек также равны V. Получаем:

$$E = \frac{m_1 V^2}{2} + \frac{m_2 V^2}{2} + \frac{k\,(\,x_p - x\,)^2}{2} + m_2 g x = \frac{(\,m_1 + m_2\,)\,V^2}{2} + \frac{k\,x_p^2}{2} - k\,x_p\,x + \frac{k\,x^2}{2} + m_2 g x\,.$$

Здесь имеем:

$$-k\,x_p\,x + m_2 g x = -k\,\frac{m_2 g}{k}\,x + m_2 g x = 0\,.$$

Получаем:

$$E = \frac{(\,m_1 + m_2\,)\,V^2}{2} + \frac{k\,x_p^2}{2} + \frac{k\,x^2}{2}\,.$$

Так как нить не скользит по обручу, механическая энергия системы сохраняется (не переходит в тепло):

$$E = E_0 \quad \longrightarrow \quad \frac{(\,m_1 + m_2\,)\,V^2}{2} + \frac{k\,x_p^2}{2} + \frac{k\,x^2}{2} = \frac{k\,x_p^2}{2} + \frac{k\,x_0^2}{2}\,,$$

$$\frac{(\,m_1 + m_2\,)\,V^2}{2} + \frac{k\,x^2}{2} = \frac{k\,x_0^2}{2}\,.$$

Получившееся равенство выглядит как закон сохранения энергии для груза массой $M = m_1 + m_2$, колеблющегося на пружине жёсткости k. Величина x_0 играет роль начального смещения груза. Таким образом, можно утверждать, что в нашем случае период малых колебаний системы равен:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} = 1{,}3\ \text{с}\,.$$

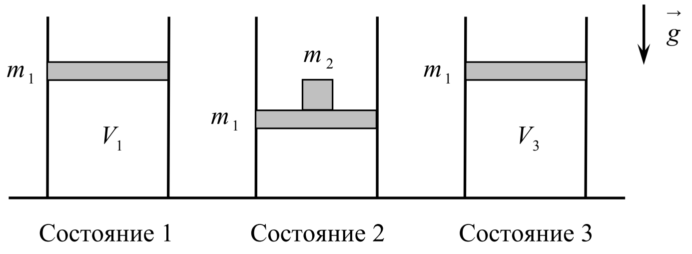
Ответ:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} = 1{,}3\ \text{с}\,.$$

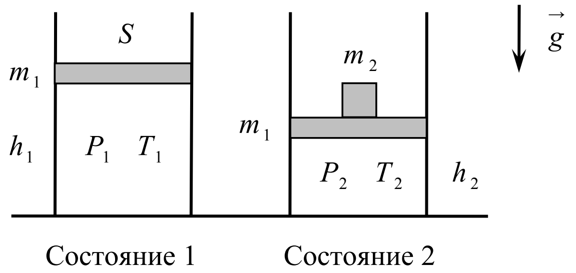
Критерии

1. Правильно указаны силы, действующие в положении равновесия (+1 балл).
2. Правильно найдено удлинение пружины в положении равновесия (+1 балл).
3. Правильно записана начальная энергия системы (+2 балла).
4. Правильно записана энергия в промежуточном состоянии (+2 балла).
5. Дано обоснование сохранения механической энергии системы (+1 балл).
6. Получено правильное уравнение баланса энергии для малых колебаний (+2 балла).
7. Получены правильные буквенный и числовой ответы для периода колебаний (+1 балл).

Задача 3. В камере, откачанной до глубокого вакуума, расположен высокий вертикальный цилиндр, закрытый сверху поршнем массой m_1. Под поршнем, в объёме $V_1 = 5$ л, находится гелий. В начальном состоянии 1 давление гелия уравновешивает давление поршня. На поршень ставят груз массой m_2, и гелий переходит в новое равновесное состояние 2. После этого груз убирают, и гелий переходит в конечное равновесное состояние 3. Найдите разность $\Delta V = V_3 - V_1$, где V_3 — объём гелия в конечном состоянии. Числовой ответ выразите в кубических сантиметрах и округлите до целого значения. Стенки цилиндра и поршень не проводят тепло, поршень движется без трения, отношение масс груза и поршня $k = m_2 / m_1 = 0{,}1$.



Возможное решение



1. Рассмотрим переход газа из состояния 1 в состояние 2. Обозначим через P_1 и T_1 давление и температуру газа в состоянии 1, через P_2 и T_2 давление и температуру в состоянии 2. Согласно первому началу термодинамики имеем:

$$0 = \nu C_V \,(\,T_2 - T_1\,) + A_{12}\,,$$

ν — количество молей газа, C_V — молярная теплоёмкость при постоянном объёме, A_{12} — работа газа. Запишем уравнение баланса энергии для поршня с грузом:

$$(\,m_1 + m_2\,)\,g\,(\,h_2 - h_1\,) = A_{12}\,,$$

h_1 и h_2 — значения высоты поршня над дном цилиндра в состояниях 1 и 2. Обозначим через S площадь поршня и рассмотрим условия механического равновесия:

$$P_1 S = m_1 g\,, \qquad P_2 S = (\,m_1 + m_2\,)\,g\,.$$

Запишем также уравнение состояния газа:

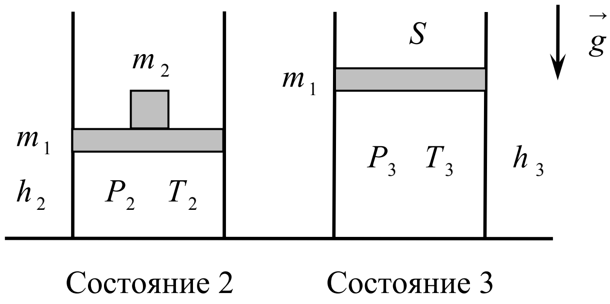
$$P_1 S\,h_1 = \nu R T_1 \quad \longrightarrow \quad \nu R T_1 = m_1 g\,h_1\,,$$

$$P_2 S\,h_2 = \nu R T_2 \quad \longrightarrow \quad \nu R T_2 = (\,m_1 + m_2\,)\,g\,h_2\,,$$

R — универсальная газовая постоянная. Используя полученные соотношения, выразим h_2 через h_1:

$$0 = \frac{C_V}{R}\,(\,\nu R T_2 - \nu R T_1\,) + (\,m_1 + m_2\,)\,g\,(\,h_2 - h_1\,)\,,$$

$$0 = \frac{C_V}{R}\,(\,(\,m_1 + m_2\,)\,g\,h_2 - m_1 g\,h_1\,) + (\,m_1 + m_2\,)\,g\,(\,h_2 - h_1\,)\,.$$



После некоторых алгебраических преобразований получаем:

$$h_2 = \left(1 - \frac{C_V}{C_P} \cdot \frac{k}{1+k}\right) h_1\,,$$

$C_P = C_V + R$ — молярная теплоёмкость при постоянном давлении, $k = m_2/m_1$.

2. Рассмотрим переход газа из состояния 2 в состояние 3. Обозначим через P_3, T_3 и h_3 давление, температуру и высоту поршня над дном цилиндра в состоянии 3. Согласно первому началу термодинамики имеем:

$$0 = \nu C_V\,(\,T_3 - T_2\,) + A_{23}\,,$$

A_{23} — работа газа. Уравнение баланса энергии для поршня:

$$m_1 g\,(\,h_3 - h_2\,) = A_{23}\,,$$

Условие механического равновесия и уравнение состояния газа:

$$P_3 S = m_1 g\,, \qquad P_3 S\,h_3 = \nu R T_3 \quad \longrightarrow \quad \nu R T_3 = m_1 g\,h_3\,.$$

Выразим h_3 через h_2:

$$0 = \frac{C_V}{R}\,(\,\nu R T_3 - \nu R T_2\,) + m_1 g\,(\,h_3 - h_2\,)\,,$$

$$0 = \frac{C_V}{R}\,(\,m_1 g\,h_3 - (\,m_1 + m_2\,)\,g\,h_2\,) + m_1 g\,(\,h_3 - h_2\,)\,.$$

Отсюда получаем:

$$h_3 = \left(1 + k \cdot \frac{C_V}{C_P}\right) h_2\,,$$

3. Используя полученные результаты, выразим h_3 через h_1:

$$h_3 = \left(1 + k \cdot \frac{C_V}{C_P}\right) h_2 = \left(1 + k \cdot \frac{C_V}{C_P}\right) \cdot \left(1 - \frac{C_V}{C_P} \cdot \frac{k}{1+k}\right) h_1\,.$$

Полагая $V_1 = S\,h_1$ и $V_3 = S\,h_3$, находим относительное изменение объёма:

$$\frac{\Delta V}{V_1} = \frac{V_3 - V_1}{V_1} = \frac{h_3 - h_1}{h_1} = \left(1 + k \cdot \frac{C_V}{C_P}\right) \cdot \left(1 - \frac{C_V}{C_P} \cdot \frac{k}{1+k}\right) - 1\,.$$

Упростим это выражение для одноатомного газа. В этом случае $C_V/C_P = 3/5$. Получаем:

$$\frac{\Delta V}{V_1} = \left(1 + \frac{3\,k}{5}\right) \cdot \left(1 - \frac{3\,k}{5\,(\,1+k\,)}\right) - 1\,.$$

Окончательно:

$$\frac{\Delta V}{V_1} = \frac{6\,k^2}{25\,(\,1+k\,)} \quad \longrightarrow \quad \Delta V = \frac{6\,k^2\,V_1}{25\,(\,1+k\,)} = 11\ \text{см}^3\,.$$

В заключение отметим, что, строго говоря, в данной задаче нельзя пользоваться уравнением адиабаты, поскольку переходы между состояниями 1, 2 и 3 являются необратимыми. Использование уравнения адиабаты даёт $\Delta V = 0$. Реально эта разность отлична от нуля, хотя и мала по сравнению с начальным объёмом V_1. Малость ΔV обусловлена малостью отношения масс груза и поршня.

Ответ:

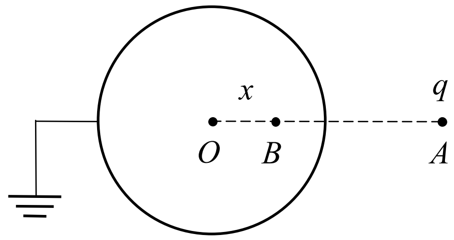
$$\Delta V = \frac{6\,k^2\,V_1}{25\,(\,1+k\,)} = 11\ \text{см}^3\,.$$

Критерии

1. Правильно записано первое начало термодинамики для перехода 1–2 (+1 балл).
2. Правильно записано уравнение баланса энергии для поршня с грузом (+1 балл).
3. Правильно записаны условия механического равновесия и уравнение состояния для состояний 1 и 2 (+1 балл).
4. Правильно найдена высота поршня в состоянии 2 (+1 балл).
5. Правильно записано первое начало термодинамики для перехода 2–3 (+1 балл).
6. Правильно записано уравнение баланса энергии для поршня (+1 балл).
7. Правильно записаны условие механического равновесия и уравнение состояния для состояния 3 (+1 балл).
8. Правильно найдена высота поршня в состоянии 3 (+2 балла).
9. Получены правильные буквенный и числовой ответы для разности объёмов (+1 балл).

Задача 4. Металлический шар с центром в точке O и радиусом $R = 2$ см заземлён. На расстоянии $L = 4$ см от центра шара, в точке A, расположен точечный заряд $q = 40$ нКл.

1. Найдите заряд шара Q. Числовой ответ выразите в нанокулонах.
2. Заряд Q, распределённый по поверхности шара, можно заменить точечным зарядом той же величины, расположенным в некоторой точке B, лежащей внутри шара на отрезке OA. Найдите расстояние $x = OB$ исходя из условия, что потенциал электрического поля, создаваемого точечными зарядами q и Q, расположенными в точках A и B, обращается в нуль в любой точке поверхности шара.
3. Используя результаты предыдущих пунктов, найдите силу F, действующую со стороны шара на заряд q. Числовой ответ выразите в миллиньютонах. Считайте, что $k = 1/4\pi\varepsilon_0 = 9{\cdot}10^9$ м/Ф.



Возможное решение

1. Индуцированный заряд Q распределён по поверхности шара. Для того чтобы найти его, рассмотрим потенциал в центре шара O:

$$\varphi_0 = k\,\frac{q}{L} + \varphi'_0\,,$$

φ'_0 — потенциал электрического поля, создаваемого индуцированным зарядом. Разобьём поверхность шара на малые элементы и перенумеруем их индексом i. Заряд элемента с номером i обозначим через ΔQ_i. Сумма всех таких зарядов равна заряду шара:

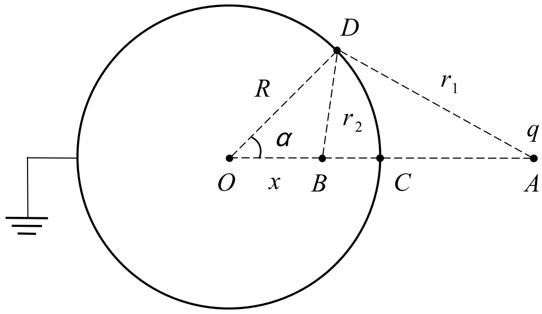
$$\sum_i \Delta Q_i = Q\,.$$

Учитывая, что все элементы находятся на расстоянии R от центра шара, получаем:

$$\varphi'_0 = \sum_i k\,\frac{\Delta Q_i}{R} = \frac{k}{R}\sum_i \Delta Q_i = k\,\frac{Q}{R}\,, \qquad \varphi_0 = k\,\frac{q}{L} + k\,\frac{Q}{R}\,.$$

Приравнивая потенциал φ_0 нулю, находим заряд шара:

$$\varphi_0 = 0 \quad\longrightarrow\quad Q = -\frac{qR}{L} = -20 \text{ нКл}\,.$$



2. Поместим заряд Q в точку B и найдём расстояние x, рассмотрев сначала простейшую точку C, в которой отрезок OA пересекает поверхность шара. Потенциал электрического поля в этой точке равен:

$$\varphi_C = k\,\frac{q}{L-R} + k\,\frac{Q}{R-x} = k\,q\left(\frac{1}{L-R} - \frac{R}{L\,(R-x)}\right).$$

Приравнивая φ_C нулю, получаем:

$$\varphi_C = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{L-R} = \frac{R}{L\,(\,R-x\,)}\,, \qquad LR - Lx = LR - R^2\,, \qquad x = \frac{R^2}{L}\,.$$

Покажем теперь, что найденное значение x обеспечивает равенство нулю потенциала в любой точке поверхности шара. Возьмём произвольную точку D на поверхности. Обозначим через α угол между радиусом OD и отрезком OA, через r_1 и r_2 длины отрезков AD и BD. По теореме косинусов имеем:

$$r_1^2 = L^2 + R^2 - 2LR\cos\alpha\,,$$

$$r_2^2 = R^2 + x^2 - 2R\,x\cos\alpha = R^2 + \frac{R^4}{L^2} - 2R\cdot\frac{R^2}{L}\cdot\cos\alpha = \frac{R^2}{L^2}\,(\,L^2 + R^2 - 2LR\cos\alpha\,)\,,$$

$$r_2^2 = \frac{R^2}{L^2}\,r_1^2 \quad \longrightarrow \quad r_2 = \frac{R}{L}\,r_1\,.$$

Потенциал электрического поля в точке D равен:

$$\varphi_D = k\,\frac{q}{r_1} + k\,\frac{Q}{r_2} = k\,\frac{q}{r_1} - k\,\frac{qR}{L}\cdot\frac{L}{R\,r_1} = k\,\frac{q}{r_1} - k\,\frac{q}{r_1} = 0\,.$$

Таким образом,

$$x = \frac{R^2}{L} = 1\text{ см}\,.$$

3. Поместив заряд Q в точку B, находим абсолютную величину силы F, с которой шар притягивает заряд q:

$$F = \frac{k\,|\,Q\,|\,q}{(\,L-x\,)^2} = \frac{k\,R\,q^2}{L\,(\,L-(\,R^2/L\,)\,)^2} = \frac{k\,q^2 R\,L}{(\,L^2 - R^2\,)^2} = 8\text{ мН}\,.$$

Ответ:

$$Q = -\frac{qR}{L} = -20\text{ нКл}\,, \qquad x = \frac{R^2}{L} = 1\text{ см}\,, \qquad F = \frac{k\,q^2 R\,L}{(\,L^2 - R^2\,)^2} = 8\text{ мН}\,.$$

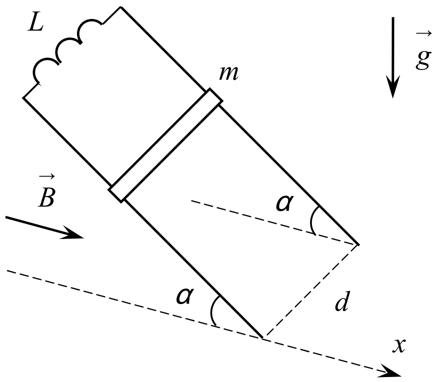
Критерии

1. Правильно записан потенциал в центре шара (+2 балла).
2. Указано, что потенциал заземлённого шара равен нулю (+1 балл).
3. Получены правильные буквенный и числовой ответы для заряда шара (+1 балл).
4. Доказано существование точки B, в которую можно стянуть заряд шара (+4 балла).
5. Получены правильные буквенный и числовой ответы для расстояния x (+1 балл).
6. Получены правильные буквенный и числовой ответы для силы F (+1 балл).

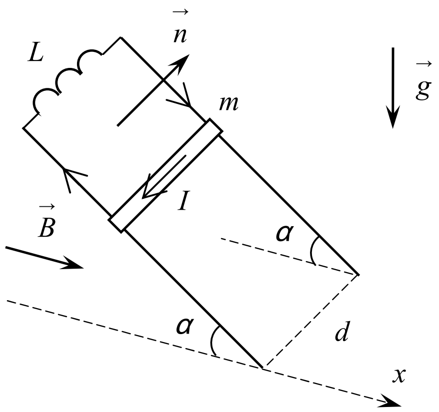
Задача 5. Два параллельных гладких металлических рельса, расстояние между которыми $d = 20$ см, установлены под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту и находятся в постоянном однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}5$ Тл, направленной горизонтально вдоль оси x. Сверху рельсы соединены проводом через катушку с индуктивностью $L = 5$ мГн. На рельсы кладут горизонтальную планку массой $m = 20$ г и отпускают её без толчка. Найдите следующие величины:

1. Силу тока I, текущего через планку в момент её отрыва от рельсов.
2. Расстояние S, пройденное планкой вдоль рельсов к моменту отрыва.
3. Скорость планки V в момент отрыва.

Сопротиление всех проводников не учитывайте. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Возможное решение



1. Направим единичный вектор нормали $\overrightarrow{n}$ к плоскости контура вверх. Положительное направление обхода контура связано с направлением $\overrightarrow{n}$ правилом буравчика (против часовой стрелки, если смотреть сверху). Обозначим через $\overrightarrow{V}$ мгновенную скорость планки. За малое время Δt планка проходит вдоль рельсов расстояние $\Delta S = V \Delta t$. Приращение магнитного потока через площадь контура равно:

$$\Delta \Phi = \overrightarrow{B}\, \overrightarrow{n}\, d\, \Delta S = B\, V d\, \sin\alpha\, \Delta t\,.$$

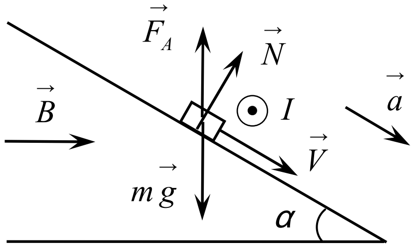
ЭДС индукции, возникающая в контуре:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -B\, V d\, \sin\alpha\,.$$

Знак минус означает, что ЭДС индукции действует в направлении, противоположном положительному направлению обхода, то есть по часовой стрелке, если смотреть сверху. В том же направлении течёт ток.

На планку действуют сила тяжести $m\overrightarrow{g}$, сила Ампера $\overrightarrow{F_A}$, направленная вертикально вверх, и сила $\overrightarrow{N}$, равная сумме двух нормальных реакций со стороны рельсов. Обозначим через $\overrightarrow{a}$ ускорение планки и запишем уравнение второго закона Ньютона:

$$m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{N}\,.$$



Проецируя на направление вектора $\overrightarrow{N}$, получаем:

$$0 = -mg\cos\alpha + F_A\cos\alpha + N \quad \longrightarrow \quad N = (\, mg - F_A\,)\cos\alpha\,.$$

Сила Ампера равна:

$$F_A = B\,Id\,,$$

I — мгновенное значение силы тока. При движении планки её скорость возрастает. Вслед за ней растут ЭДС индукции, сила тока и сила Ампера. Сила N при этом уменьшается и в некоторый момент времени обращается в нуль. В этот момент планка отрывается от рельсов. Полагая $N = 0$, находим силу тока в момент отрыва:

$$N = 0 \quad \longrightarrow \quad F_A = mg\,, \quad B\,Id = mg \quad \longrightarrow \quad I = \frac{mg}{B\,d} = 2\ \text{А}\,.$$

2. Помимо ЭДС индукции, возникающей в движущейся планке, в катушке действует ЭДС самоиндукции. Если не учитывать сопротивление контура, то эти ЭДС следует приравнять друг другу:

$$|\,\varepsilon\,| = L\,\frac{\Delta\,I}{\Delta\,t} \quad \longrightarrow \quad B\,Vd\,\sin\alpha = L\,\frac{\Delta\,I}{\Delta\,t}\,.$$

Здесь $\Delta\,I$ — приращение силы тока за малое время $\Delta\,t$. Перепишем это равенство так:

$$B\cdot(\,V\Delta\,t\,)\cdot d\,\sin\alpha = L\Delta\,I\,, \qquad B\cdot\Delta\,S\cdot d\,\sin\alpha = L\Delta\,I\,.$$

Суммируя такие равенства по всем малым промежуткам времени до момента отрыва и учитывая, что в начале движения сила тока равнялась нулю, получаем:

$$B\,Sd\,\sin\alpha = L\,I \quad \longrightarrow \quad S = \frac{L\,I}{B\,d\,\sin\alpha} = \frac{mgL}{(\,B\,d\,)^2\,\sin\alpha} = 20\ \text{см}\,.$$

3. Запишем уравнение баланса энергии в контуре:

$$\frac{L\,I^2}{2} = A_1\,,$$

A_1 — работа ЭДС индукции. Для планки имеем:

$$\frac{mV^2}{2} - mgh = A_2\,,$$

V — скорость планки при отрыве, $h = S\sin\alpha$, A_2 — работа силы Ампера. Сложим эти равенства:

$$\frac{L\,I^2}{2} + \frac{mV^2}{2} - mg\,S\sin\alpha = A_1 + A_2\,.$$

Покажем, что сумма работ A_1 и A_2 равна нулю:

$$A_1 + A_2 = 0\,.$$

Для этого рассмотрим элементарные работы за малое время $\Delta\,t$. За это время в направлении действия ЭДС индукции по контуру протекает заряд $\Delta\,q = I\Delta\,t$. Элементарная работа ЭДС индукции равна:

$$\delta\,A_1 = |\,\varepsilon\,|\,\Delta\,q = B\,Vd\,\sin\alpha\,I\,\Delta\,t\,.$$

Для элементарной работы силы Ампера имеем:

$$\delta A_2 = F_A \cdot \Delta S \cdot \cos(90^\circ + \alpha) = -B\,I d \cdot V \Delta t \cdot \sin\alpha\,.$$

Как видно, сумма элементарных работ равна нулю:

$$\delta A_1 + \delta A_2 = 0\,.$$

Отсюда следует равенство нулю суммы полных работ $A_1 + A_2$. В принципе, этот результат можно обосновать по–другому, сказав, что ЭДС индукции и сила Ампера возникают вследствие действия силы Лоренца на свободные носители заряда в движушейся планке. Поскольку сила Лоренца не совершает работу, сумма работ ЭДС индукции и силы Ампера должна равняться нулю. Так или иначе, получаем закон сохранения энергии для системы, состоящей из движущейся планки и катушки индуктивности:

$$\frac{L\,I^2}{2} + \frac{mV^2}{2} - mg\,S\sin\alpha = 0\,.$$

Отсюда находим скорость планки в момент отрыва:

$$\frac{mV^2}{2} = mg\,S\sin\alpha - \frac{L\,I^2}{2} = mg \cdot \frac{mgL}{(B\,d)^2\,\sin\alpha} \cdot \sin\alpha - \frac{L}{2} \cdot \left(\frac{mg}{B\,d}\right)^2 = \frac{L}{2}\left(\frac{mg}{B\,d}\right)^2,$$

$$V = \frac{g\sqrt{mL}}{B\,d} = 1\ \text{м/с}\,.$$

Ответ:

$$I = \frac{mg}{B\,d} = 2\ \text{А}\,, \qquad S = \frac{mgL}{(B\,d)^2\,\sin\alpha} = 20\ \text{см}\,, \qquad V = \frac{g\sqrt{mL}}{B\,d} = 1\ \text{м/с}\,.$$

Критерии

1. Правильно найдены величина и направление ЭДС индукции (+1 балл).
2. Правильно указаны силы, действующие на планку, и записано уравнение второго закона Ньютона (+1 балл).
3. Получены правильные буквенный и числовой ответы для силы тока при отрыве (+1 балл).
4. Получены правильные буквенный и числовой ответы для расстояния, пройденного планкой до отрыва (+3 балла).
5. Дано обоснование сохранения энергии для системы, состоящей из планки и катушки индуктивности (+3 балла).
6. Получены правильные буквенный и числовой ответы для скорости планки при отрыве (+1 балл).

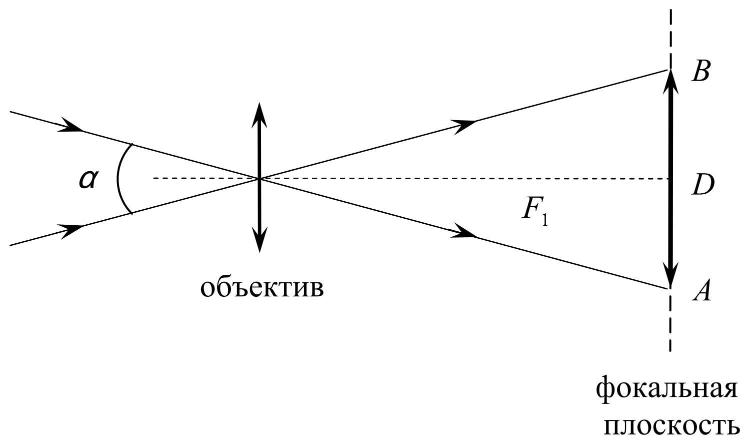
Задача 6. Простейший телескоп–рефрактор, собранный по схеме Кеплера, состоит из объектива — собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = 90$ см, и окуляра — собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_2 = 3$ см. Главные оптические оси линз совпадают. Рассматривая в телескоп очень далёкий объект (например, планету), наблюдатель видит увеличенное перевёрнутое изображение. Сначала планету изучает близорукий наблюдатель. При этом его глаз аккомодирован на расстояние наилучшего зрения $d_1 = 15$ см. Затем его сменяет дальнозоркий наблюдатель, глаз которого аккомодируется на расстояние наилучшего зрения $d_2 = 45$ см. Найдите следующие величины:

1. Расстояние x, на которое дальнозоркий наблюдатель должен передвинуть окуляр. Числовой ответ выразите в миллиметрах и округлите до целого значения.
2. Разность $\Delta k = k_1 - k_2$, где k_1 и k_2 — угловые увеличения для близорукого и дальнозоркого наблюдателей. Угловое увеличение $k = \beta/\alpha$, где β — угол, под которым наблюдатель видит объект в телескоп, α — угол, под которым он видит тот же объект невооружённым глазом.

Считайте, что в обоих случаях глаз наблюдателя расположен вплотную к окуляру и все углы малы.

Подсказка: объектив телескопа строит изображение планеты в фокальной плоскости, а наблюдатель рассматривает это изображение в окуляр как в лупу.

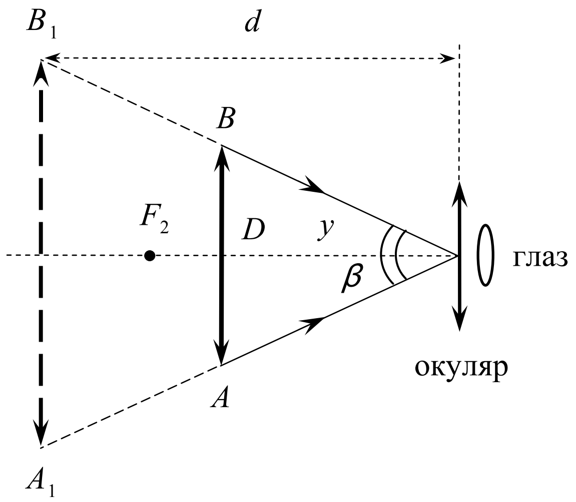
Возможное решение



1. Так как планета является протяжённым источником света, мысленно разобьём её видимую поверхность на малые элементы, каждый из которых будем считать светящейся точкой. Поскольку планета находится очень далеко, можно считать, что от каждой точки её поверхности в объектив идёт параллельный пучок лучей. Объектив собирает каждый такой пучок в точку, лежащую в фокальной плоскости. Эти точки образуют первичное изображение планеты в виде некоторого круга. Для каждого параллельного пучка достаточно рассмотреть один луч, идущий без преломления через оптический центр объектива. На рисунке показаны два таких луча, идущие от верхнего и нижнего краёв планеты. Угол α между этими лучами есть угловой диаметр планеты. Изображения краёв получаются в точках A и B, в которых лучи пересекают фокальную плоскость. Точка A — изображение вехнего края, точка B — нижнего. Таким образом, объектив строит действительное перевёрнутое изображение планеты. Найдём его диаметр D, равный длине отрезка AB. Используя малость угла α, получаем:

$$\frac{D}{2} = F_1 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \approx F_1 \cdot \frac{\alpha}{2} \quad \longrightarrow \quad D = F_1\,\alpha\,.$$

2. Первичное изображение играет роль источника света для наблюдателя, который рассматривает его в окуляр как в лупу. При этом окуляр располагается на расстояниии $y < F_2$ от первичного изображения и строит мнимое изображение, которое также имеет форму круга. На рисунке диаметр этого круга показан пунктирным отрезком A_1B_1. Точки A_1 и B_1 являются мнимыми изображениями точек A и B и лежат на продолжениях вспомогательных лучей, проведённых из A и B через оптический центр окуляра. Свет, выходящий из окуляра и попадающий в глаз наблюдателя, устроен так, как будто он испускается предметом, совпадающим с мнимым изображением. Если считать, что глаз расположен вплотную к окуляру, то расстояние от мнимого изображения до окуляра равно расстоянию наилучшего зрения d. Таким образом, при наблюдении в телескоп наблюдатель видит перевёрнутое изображение планеты под углом зрения β.



Найдём расстояние y, угол β и угловое увеличение телескопа k. По формуле линзы, записанной для окуляра, получаем:

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{d} = \frac{1}{F_2} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{F_2} + \frac{1}{d}, \qquad y = \frac{d\,F_2}{d + F_2}.$$

Для малого угла β имеем:

$$\frac{\beta}{2} \approx \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{D}{2\,y} \quad \longrightarrow \quad \beta = \frac{D}{y} = F_1\,\alpha \left(\frac{1}{F_2} + \frac{1}{d} \right).$$

Угловое увеличение равно:

$$k = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{F_1}{F_2} + \frac{F_1}{d}.$$

3. Для близорукого и дальнозоркого наблюдателей имеем:

$$y_1 = \frac{d_1 F_2}{d_1 + F_2}, \qquad y_2 = \frac{d_2 F_2}{d_2 + F_2};$$

$$k_1 = \frac{F_1}{F_2} + \frac{F_1}{d_1}, \qquad k_2 = \frac{F_1}{F_2} + \frac{F_1}{d_2}.$$

Из формулы

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{F_2} + \frac{1}{d}$$

следует, что при увеличении d расстояние y также увеличивается. Поэтому $y_2 > y_1$. Это означает, что дальнозоркий наблюдатель должен выдвинуть окуляр на расстояние

$$x = y_2 - y_1 = \frac{d_2 F_2}{d_2 + F_2} - \frac{d_1 F_2}{d_1 + F_2} = \frac{F_2^2\,(\,d_2 - d_1\,)}{(\,d_1 + F_2\,)\,(\,d_2 + F_2\,)} = 3 \text{ мм}.$$

Разность угловых увеличений равна:

$$\Delta\,k = k_1 - k_2 = \frac{F_1}{d_1} - \frac{F_1}{d_2} = 4.$$

Ответ:

$$x = \frac{F_2^2\,(\,d_2 - d_1\,)}{(\,d_1 + F_2\,)\,(\,d_2 + F_2\,)} = 3 \text{ мм},$$

$$\Delta\,k = \frac{F_1}{d_1} - \frac{F_1}{d_2} = 4.$$

Критерии

1. Правильно найден диаметр первичного изображения (+1 балл).
2. Правильно указано положение окуляра (+1 балл).
3. Правильно указано положение мнимого изображения (+1 балл).
4. Правильно записана формула линзы для окуляра (+1 балл).
5. Правильно найдено расстояние от первичного изображения до окуляра (+1 балл).
6. Правильно найден угол зрения, под которым наблюдатель видит мнимое изображение (+2 балла).
7. Правильно найдено угловое увеличение телескопа (+1 балл).
8. Получены правильные буквенный и числовой ответы для смещения окуляра x (+1 балл).
9. Получены правильные буквенный и числовой ответы для разности увеличений (+1 балл).