

**Задача 1.** Даша опускает тело в форме кирпича с квадратным основанием в воду сначала одной квадратной гранью, затем другой. В обоих случаях кирпич плавает, и Даша делает отметку на кирпиче в том месте, где он соприкасается с водой. Оказалось, что расстояние между двумя отметками равно  $h = 5$  см. Считая, что каждый раз кирпич погружался в воду меньше, чем наполовину, рассчитайте длину наибольшего ребра  $L$ . Плотность тела однородна и равна  $\rho = 400$  кг/м<sup>3</sup>, плотность воды  $\rho_{\text{в}} = 1000$  кг/м<sup>3</sup>.

*Возможное решение*

1) Обозначим часть кирпича, непогруженную в воду через  $x$ . Тогда длина наибольшего ребра  $L$  выражается как  $L = 2x + h$ , откуда  $x = \frac{L-h}{2}$ .

2) Обозначим ребро квадратной грани кирпича через  $a$  и запишем уравнение баланса:

$$\begin{aligned}F_{\text{Архимеда}} &= F_{\text{тяжести}}, \\x \cdot a^2 \cdot \rho_{\text{в}} \cdot g &= L \cdot a^2 \cdot \rho \cdot g, \\L &= \frac{h}{1 - 2 \cdot \rho / \rho_{\text{в}}} = 25 \text{ см.}\end{aligned}$$

**Ответ:**

$$L = 25 \text{ см.}$$

*Критерии*

1. Верно получено выражение для части кирпича, которая погружена в воду. (+1 балл)
2. Верно записана сила Архимеда. (+1 балл)
3. Верно записана сила тяжести. (+1 балл)
4. Получен верный численный ответ. (+ 2 балла)

**Задача 2.** Жители  $\alpha$ -Центавра, Саша и Вова, наблюдают за движением космических судов в поясе астероидов в их звездной системе. Они заметили, что большинство космических поездов, пролетающих мимо определённого астероида в поясе, не совершают на нем посадку. Они предполагают, что это происходит из-за того, что астероид слишком мал и неудобен для посадки, так как максимальная длина его посадочной платформы составляет всего  $l = 300$  м. Саша заметил, что один из космических поездов пролетает начало платформы за время  $t_1 = 25$  с. В то же время Вова заметил, что преодоление всей посадочной платформы астероида поездом занимает время  $t_2 = 42$  с. На сколько метров необходимо увеличить размер посадочной платформы, чтобы пролетающий поезд смог совершить на нём посадку? В ответе укажите минимальное целое число. Считать, что космические поезда движутся равномерно. Длину посадочной платформы астероида считать достаточной, если она больше или равна длине космического поезда.

*Возможное решение*

1) Обозначим скорость корабля за  $v$ . Время, за которое корабль преодолевает начало платформы равно  $t_1$  по условию. Заметим, что в таком случае длина корабля  $x$  будет равна  $x = vt_1$ .

2) В то же время Вова заметил, что преодоление всей посадочной платформы астероида поездом занимает время  $t_2 = 42$  с. Оно включает в себя прохождение кораблем начала платформы, и время, за которое конец корабля преодолеет всю платформу астероида. В таком случае

$$t_2 = t_1 + \frac{l}{v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{l}{t_2 - t_1} \Rightarrow x = \frac{l}{t_2 - t_1} t_1.$$

3) Тогда для совершения посадки на астероиде размер посадочной платформы необходимо увеличить на величину

$$\Delta l = x - l = \frac{l \cdot t_1}{t_2 - t_1} - l = 141,2 \text{ м.}$$

А минимальное целое число составит  $\Delta l = 142$  м.

**Ответ:**

$$\Delta l = 142 \text{ м.}$$

*Критерии*

1. Верно получено время, требуемое для прохождения всей посадочной платформы астероида. (+2 балла)
2. Верно получена скорость космического поезда. (+1 балл)
3. Верно получен нужный размер посадочной платформы на астероиде. (+1 балл)
4. Получен верный численный ответ. (+ 1 балл)

**Задача 3.** На рисунке приведена система рычагов. Все рычаги находятся в горизонтальном положении. Два груза массами  $m$  и  $M$  закреплены на тонких нерастяжимых невесомых нитях на плечах большого рычага и на соответствующих плечах малых рычагов, как показано на рисунке. Внутренние плечи малых рычагов связаны натянутой нерастяжимой невесомой нитью. Длины плеч всех рычагов отмечены на рисунке. Найдите отношение  $\frac{m}{M}$ , если известно, что сила, действующая на левое плечо большого рычага, равна половине силы тяжести, действующей на груз массы  $m$ .

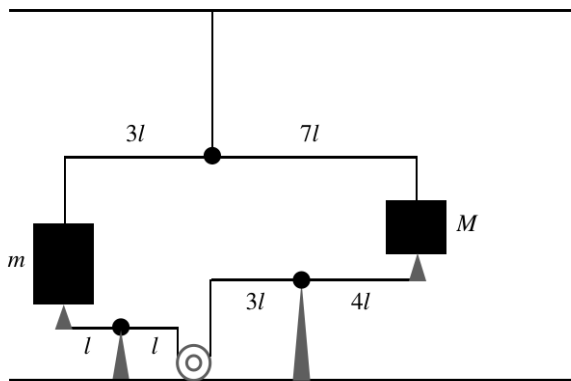


Рис. к задаче 3

*Возможное решение*

1) Обозначим силы, действующие на левое и правое плечи большого рычага как  $T_1$  и  $T_2$  соответственно. Из условия равновесия для большого рычага получаем:

$$T_1 \cdot 3l = T_2 \cdot 7l,$$

$$T_2 = \frac{3}{7}T_1.$$

По условию  $T_1 = \frac{mg}{2}$ , откуда

$$T_2 = \frac{3}{14}mg.$$

2) Запишем условия равновесия для малых рычагов, обозначив силу натяжения внутренней нити между плечами малых рычагов за  $T_3$ :

$$(mg - T_1) \cdot l = T_3 \cdot l \quad \Rightarrow \quad \frac{mg}{2} \cdot l = T_3 \cdot l,$$

$$(Mg - T_2) \cdot 4l = T_3 \cdot 3l \quad \Rightarrow \quad (Mg - \frac{3}{14}mg) \cdot 4l = T_3 \cdot 3l.$$

Откуда получаем:

$$\frac{1}{2}mg = \frac{4}{3}Mg - \frac{4}{14}mg,$$

$$\frac{11}{14}mg = \frac{4}{3}Mg,$$

$$\frac{m}{M} = \frac{56}{33}.$$

**Ответ:**

$$\frac{m}{M} = \frac{56}{33}.$$

*Критерии*

1. Верно записано условие равновесия верхнего рычага. (+1 балла)
2. Верно записаны условия равновесия нижних рычагов. (+2 балла)
3. Получено уравнение, связывающее массы  $m$  и  $M$ . (+1 балл)
4. Получен правильный численный ответ. (+1 балл)

**Задача 4.** При заваривании чая чайники, помещённые в воду, сначала плавают на поверхности воды, а затем медленно опускаются на дно чайника. Это связано с изменением массы и объёма чайников при контакте с водой. Сразу после попадания в чайник чайники погружены в воду на 70% своего объёма. Через некоторое время масса чайников увеличивается на 50%. При каком максимально возможном увеличении своего объёма чайники начнут опускаться на дно? Ответ дайте в процентах от исходного значения объёма чайников.

*Возможное решение*

1) Запишем равенство сил в начальный момент времени при условии, что чайники плавают на поверхности:

$$0,7 \rho_{\text{в}} V_0 g = m_0 g,$$

где  $m_0$  и  $V_0$  – начальные масса и объём чайников.

2) Чайники начинают тонуть, когда выполнено условие

$$\rho_{\text{в}} V_1 g \leq 1,5 m_0 g,$$

где  $V_1$  – новое значение объёма чайников. Из первого условия получаем:

$$\rho_{\text{в}} V_1 g \leq 1,5 \cdot 0,7 \rho_{\text{в}} V_0 g,$$

$$V_1 \leq 1,5 \cdot 0,7 V_0 = 1,05 V_0.$$

Таким образом, максимально возможное увеличение объёма чайники составляет 5%.

**Ответ:**

5%.

*Критерии*

1. Верно записано условие плавания чайников. (+1 балла)
2. Верно записано условие на максимальный объём чайников, при котором они погружаются на дно. (+2 балла)
3. Получена связь максимально возможного объёма чайников с их исходным объёмом. (+1 балл)
4. Получен правильный численный ответ. (+1 балл)

**Задача 5.** Вероника купила в супермаркете некоторое количество сыра, представляющего собой кубик размерами  $5 \text{ см} \times 5 \text{ см} \times 5 \text{ см}$  для необычных экспериментов с динамометром. Внутри сыра имеются дырки, которые образуются в процессе его созревания. Сначала она измерила вес сыра, погрузив его целиком в воду, и получила  $P_1 = 0,26 \text{ Н}$ . Дополнительно Вероника расплавила сыр на водяной бане, отметив, что масса сыра после его затвердевания не изменилась, а объём уменьшился на 10%. Определите плотность монолитного сыра без дырок по результатам эксперимента Вероники, предполагая, что после его расплавления и затвердевания дырок в сыре не осталось. Плотность воды  $\rho_{\text{в}} = 1 \text{ г/см}^3$ . Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ кг/(м} \cdot \text{с}^2)$ .

*Возможное решение*

1) Запишем массу  $M$  целого куска сыра, разделив составляющие дырок и сыра:

$$M = \rho_d V_d + \rho_c V_c = \rho_d V_d + \rho_c (V - V_d) = \rho_c V - (\rho_c - \rho_d) V_d,$$

где  $\rho_d$  и  $\rho_c$  – плотность дырок и плотность монолитного сыра соответственно, а  $V_d$ ,  $V_c$  и  $V$  – объём всех дырок, объём монолитного сыра и суммарный объём сыра (дан в условиях задачи) соответственно.

2) Запишем выражение для веса  $P_1$ , фиксируемого динамометром при погружении сыра в воду (подставим при этом найденное выражение для массы целого куска сыра):

$$P_1 = Mg - \rho_{\text{в}} V g = \rho_c V g - (\rho_c - \rho_d) V_d g - \rho_{\text{в}} V g \Rightarrow$$

$$V_d = \frac{(\rho_c - \rho_{\text{в}}) V - \frac{P_1}{g}}{\rho_c - \rho_d}.$$

3) Известно, что объём сыра после его затвердевания уменьшился на 10%, тогда верно

$$V - V_d = 0,9 V \Rightarrow V_d = 0,1 V.$$

4) Заметим, что плотность дырок, а если быть точным плотность воздуха, заполняющего дырки, мала по сравнению с плотностями твердых тел  $\Rightarrow$  плотностью дырок в данной задаче можно пренебречь. Тогда будет верно

$$\rho_c = \frac{\frac{P_1}{g} + \rho_{\text{в}} V}{V - V_d} = \frac{\frac{P_1}{g} + \rho_{\text{в}} V}{0,9 V} = \frac{10}{9} \left( \frac{P_1}{Vg} + \rho_{\text{в}} \right).$$

Подставляя известные значения, находим искомую плотность монолитного сыра:

$$\rho_c \approx 1,34 \text{ г/см}^3.$$

**Ответ:**

$$\rho_c \approx 1,34 \text{ г/см}^3.$$

*Критерии*

1. Верно записано выражение для веса, фиксируемого динамометром. (+ 2 балла)
2. Верно выражен объём дырок в сыре. (+ 1 балл)
3. Получена связь плотности сыра с весом, фиксируемым динамометром. (+ 1 балл)
4. Получен верный численный ответ. (+ 1 балл)