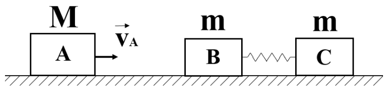
Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2024

Заключительный этап 6 апреля 9 класс

Задача 1. На гладком горизонтальном столе лежат два одинаковых бруска B и C, соединённых недеформированной пружиной. Масса каждого бруска $m = 0{,}15$ кг. С бруском B абсолютно упруго сталкивается брусок A массой $M = 0{,}55$ кг, движущийся с горизонтальной скоростью $v_A = 8$ м/с, направленную вдоль пружины. Считая, что за время столкновения пружина не успевает деформироваться, найдите следующие величины:

1. Отношение энергии $x = Q/E_A$, где Q - энергия относительных колебаний брусков B и C после столкновения, E_A - начальная кинетическая энергия бруска A.
2. Значение отношения масс $\alpha = \frac{M}{m}$, при котором величина x будет максимальна.



Возможное решение

1. Определим энергию, которая была потеряна в результате столкновения брусков. Для начала найдем общую кинетическую энергию системы в момент до соударения:

$$E_A = \frac{Mv_A^2}{2}.$$

Будем считать бруски B и C, соединенные пружиной, составным телом массой $2m$, обладающим некоторой энергией Q. Реально это энергия относительных колебаний брусков после столкновения. Скорость движения этого тела обозначим через v_c. Тогда его полная энергия будет равна

$$\frac{2mv_c^2}{2} + Q.$$

После соударения можно записать:

$$E_A = \frac{Mv_A'^2}{2} + \frac{2mv_c^2}{2} + Q,$$

где $v_A^{'}$ — скорость бруска массы M после соударения, v_c — скорость центра масс брусков B и C, Q — энергия, которая уходит на внутреннее движение системы брусков B и C. Теперь можно выразить Q:

$$Q = \frac{Mv_A^2}{2} - \frac{Mv_A{}'2}{2} - mv_c^2.$$

Чтобы найти неизвестные скорости, запишем законы сохранения импульса и энергии в момент до соударения и сразу после него, обозначив скорость бруска B в момент после удара через v_B.

$$\text{ЗСИ:} \quad Mv_A = Mv_A' + mv_B;$$

$$\text{ЗСЭ:} \quad \frac{Mv_A^2}{2} = \frac{Mv_A{}'2}{2} + \frac{mv_B^2}{2}.$$

Откуда получим:

$$v_A' = \frac{M - m}{M + m} v_A\,,$$

$$v_B = v_A + v_A' = \frac{2M}{M + m} v_A.$$

В момент непосредственно после соударения брусок C имеет скорость равную 0, тогда можно найти скорость центра масс v_c:

$$v_c = \frac{mv_B + m \cdot 0}{m+m} = \frac{v_B}{2} = \frac{M}{M+m} v_A.$$

Тогда Q можно выразить следующим образом:

$$Q = \frac{Mv_A^2}{2}\left(1 - \frac{2mM}{(M+m)^2} - \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2\right) = \frac{Mv_A^2}{2} \cdot \frac{2Mm}{(M+m)^2}.$$

Выразим искомое отношение энергий x:

$$x = \frac{Q}{E_A} = \frac{2Mm}{(M+m)^2} = \frac{2\alpha}{(1+\alpha)^2} \approx 0{,}34.$$

2. Заметим, что «потерянная» энергия Q равна поступательной энергии сложной системы. Следовательно, наибольшая потеря энергии наблюдается при максимально возможной передаче энергии по отношению к начальной кинетической энергии, что имеет место, когда вся кинетическая энергия переходит от бруска A к бруску B, то есть когда $M = m$, $\alpha = 1$.

Также можно воспользоваться неравенством о среднем геометрическом:

$$\frac{1+\alpha}{2} \geq \sqrt{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha}{(1+\alpha)^2} \leq \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad x \leq \frac{1}{2}.$$

Максимум $x = \frac{1}{2}$ достигается при $\alpha = 1$.

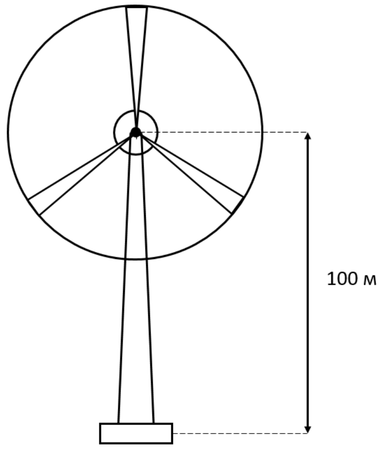
Ответ:

$$1)\ x \approx 0{,}34; \quad 2)\ \alpha = 1.$$

Критерии

1. Верно записан закон сохранения энергии до и после соударения. (+ 1 балл)
2. Из закона сохранения энергии и импульса верно найдена скорость центра масс системы двух шаров. (+ 1 балл)
3. Верно выражена энергия Q. (+ 1 балл)
4. Получен верный численный ответ для x. (+ 1 балл)
5. Проведен верный анализ и получен верный численный ответ для α. (+ 1 балл)

Задача 2. Основу Кочубеевской ветроэлектростанции составляют ветрогенераторы с длиной лопасти $r = 25$ м, вращательный центр которых расположен на высоте $h = 100$ м от земли, как показано на рисунке. Направление ветра перпендикулярно плоскости рисунка, всю свою энергию ветер отдаёт на вращение лопастей. Электрическая мощность, вырабатываемая одной такой турбиной, поступает в соседнюю деревню по электрокабелю с сопротивлением $R = 7{,}5$ Ом и напряжением $U = 2500$ В. Найдите долю мощности, которая теряется при передаче электроэнергии от ветрогенератора в деревню. КПД ветрогенератора составляет $\eta = 40$ %. Средняя скорость ветра на высоте 100 м составляет $v = 11$ м/с. Плотность воздуха $\rho = 1{,}3$ мг/см^3.



Возможное решение

1) Найдем кинетическую энергию воздуха, который приводит лопасти в движение. Для этого необходимо найти массу воздуха, который проходит через ветрогенератор за одну секунду:

$$M = \rho V = \rho \cdot (\pi r^2 v \cdot 1 \text{ сек}) \quad \to \quad E_K = \frac{Mv^2}{2} = \frac{\pi \rho r^2 v^3}{2} \cdot 1 \text{ сек}.$$

2) Мощность, вырабатываемая турбиной равна:

$$P_T = \eta E_K = \frac{\pi \eta \rho r^2 v^3}{2} \cdot 1 \text{ сек}.$$

3) Мощность, которая теряется при передаче электроэнергии от ветрогенератора в деревню, находится как:

$$P' = I^2 R = (P_T/U)^2 \cdot R.$$

4) Тогда доля потерянной мощности составляет:

$$\alpha = \frac{P_T}{P'} = \frac{2U^2}{R\pi\eta\rho r^2 v^3 \cdot 1 \text{ сек}} \approx 1{,}23 > 1.$$

Разумеется, такое значение говорит о том, что ток в деревню не потечет — метод передачи энергии не является эффективным, а потери эквивалентны 100 %.

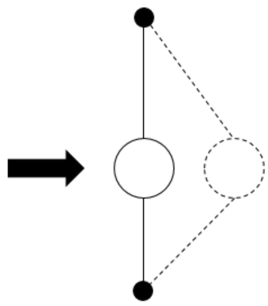
Ответ:

$$\alpha \approx 1{,}23.$$

Критерии

1. Верно найдена масса воздуха, проходящая через ветрогенератор за единицу времени. (+ 1 балл)
2. Верно найдена кинетическая энергия воздуха. (+ 1 балл)
3. Верно найдена мощность, вырабатываемая турбиной. (+ 1 балл)
4. Верно найдена мощность, которая теряется при передаче электроэнергии от ветрогенератора в деревню. (+ 1 балл)
5. Получен верный численный ответ. (+ 1 балл)

Задача 3. Боксёрский тренировочный мяч, имеющий массу m, закреплён между двумя одинаковыми эластичными резинками длиной l, как показано на рисунке. Каждая резинка обладает такой жёсткостью k, что при приложении силы, равной mg, длина резинки увеличивается до $2l$. Верхняя и нижняя резинки закреплены к потолку и полу соответственно в помещении высотой $4l$. Сначала мячу придают небольшое вертикальное смещение и отпускают. После затухания колебаний мячу аналогично придают небольшое горизонтальное смещение и отпускают. Найдите отношение периода вертикальных колебаний к периоду горизонтальных колебаний. Радиус мяча $r \ll l$. Для малых углов α при расчётах принять $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha$.



Возможное решение

1) Для начала найдем равновесное положение мяча. Пусть индекс 1 относится к резинке, соединяющей мяч с потолком, а индекс 2 – к резинке, соединяющей мяч с полом. Тогда x_1, x_2 – соответствующие растяжения резинок в положении равновесия, для которых верно равенство

$$x_1 + x_2 + 2l = 4l \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 = 2l.$$

2) Запишем силы, действующие на мяч в положении равновесия и найдем растяжения резинок, учитывая, что $k \cdot (2l - l) = mg$ из условия задачи.

$$T_1 = T_2 + mg,$$

$$kx_1 = kx_2 + mg,$$

$$k \cdot 2l - kx_2 = kx_2 + mg,$$

$$2mg - mg = 2kx_2.$$

$$\text{Так как } k = \frac{mg}{l} \quad \Rightarrow \quad 2kx_2 = 2\frac{mg}{l}x_2 \quad \Rightarrow$$

$$x_2 = \frac{l}{2}, \quad x_1 = \frac{3}{2}l.$$

3) Теперь придадим мячу небольшое вертикальное смещение y. Для определенности выберем направление смещения. Пусть мяч смещают вниз. Запишем действующие на мяч силы:

$$ma = -k(\frac{3}{2}l + y) + k(\frac{l}{2} - y) + mg,$$

$$ma = -kl - 2ky + mg.$$

Поскольку $kl = mg$, получим

$$ma = -2ky.$$

Тогда по аналогии вывода периода колебаний пружинного маятника найдем период вертикальных колебаний мяча:

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

4) Теперь рассмотрим горизонтальные колебания при небольшом отклонении мяча в этой плоскости. Обозначим силу, действующую на мяч со стороны резинок, за F. Угол между отклоненной после растяжения верхней резинкой и вертикалью обозначим за θ, а угол между отклоненной после растяжения нижней резинкой и вертикалью – за φ. Длины растянутых верхней и нижней резинок – L_1 и L_2 соответственно. Поскольку в положении равновесия длины резинок, закрепленных к потолку и полу, соответственно равны $5l/2$ и $3l/2$, то

$$L_1 = \frac{5l}{2\cos\theta}, \quad L_2 = \frac{3l}{2\cos\varphi}.$$

5) Второй закон Ньютона в проекции на горизонтальную ось примет вид:

$$F = T_1 \sin\theta + T_2 \sin\varphi,$$

$$F = k\left(\frac{5l}{2\cos\theta} - l\right)\sin\theta + k\left(\frac{3l}{2\cos\varphi} - l\right)\sin\varphi,$$

$$F = kl\left(\frac{5}{2}\operatorname{tg}\theta - \sin\theta + \frac{3}{2}\operatorname{tg}\varphi - \sin\varphi\right).$$

Воспользуемся приближением для малых углов $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha$, подставляя значения $\operatorname{tg}\theta = \frac{2x}{5l}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2x}{3l}$, где x – смещение мяча по горизонтали (общий катет в прямоугольных треугольниках с гипотенузами L_1, L_2 и катетами $5l/2$, $3l/2$ соответственно). После подстановки и упрощения выражения получим:

$$F = \frac{14}{15}kx.$$

6) Аналогично вертикальным колебаниям, получим период горизонтальных колебаний:

$$T'' = 2\pi\sqrt{\frac{15m}{14k}}.$$

Отсюда искомое отношение периода вертикальных колебаний к периоду горизонтальных колебаний равно

$$\frac{T'}{T''} = \sqrt{\frac{7}{15}} \approx 0{,}68.$$

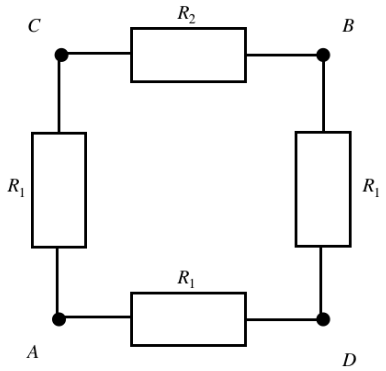
Ответ:

$$\frac{T'}{T''} = \sqrt{\frac{7}{15}} \approx 0{,}68.$$

Критерии

1. Найдены растяжения резинок в состоянии покоя (+ 1 балл).
2. Верно записан закон Ньютона на вертикальную ось для случая вертикальных колебаний (+ 1 балл).
3. Верно найден период вертикальных колебаний (+ 1 балл).
4. Верно записан закон Ньютона в проекции на обе оси для случая горизонтальных колебаний (+ 1 балл).
5. Верно найден период горизонтальных колебаний (+ 1 балл).

Задача 4. Рассмотрите схему электрической цепи, изображенную на рисунке. Подключая клеммы источника постоянного напряжения к разным парам точек из набора $\{A, B, C, D\}$, можно получить три различных значения мощности тока в цепи. Известно, что значения двух наибольших мощностей относятся как 1 : 3, причём сопротивление $R_1 > R_2$. Найдите отношение $\frac{R_1}{R_2}$ и определите, во сколько раз наибольшая возможная мощность больше наименьшей возможной мощности.



Возможное решение

1) Очевидно, что три возможных значения мощности получаются, например, при подключении к внешнему источнику через пары точек AB, BC и BD. Вычислим эти мощности по формуле:

$$P = \frac{U^2}{R},$$

где U — значение внешнего напряжения, подаваемого на клеммы. Получаем:

$$P_{AB} = U^2 \frac{3R_1 + R_2}{2R_1(R_1 + R_2)},$$

$$P_{BC} = U^2 \frac{3R_1 + R_2}{3R_1 R_2},$$

$$P_{BD} = U^2 \frac{3R_1 + R_2}{R_1(2R_1 + R_2)}.$$

2) Чтобы воспользоваться данными из условия об отношениях напряжений, рассчитаем следующие отношения:

$$\frac{P_{AB}}{P_{BC}} = \frac{3R_2}{2R_1 + 2R_2},$$

$$\frac{P_{AB}}{P_{BD}} = \frac{2R_1 + R_2}{2R_1 + 2R_2},$$

$$\frac{P_{BC}}{P_{BD}} = \frac{2R_1 + R_2}{3R_2}.$$

Из этих оношений и условия $R_1 > R_2$ можно сделать следующие выводы: $P_{BC} > P_{AB}$ из первого соотношения, $P_{BD} > P_{AB}$ из второго соотношения и $P_{BC} > P_{BD}$ из третьего соотношения. Таким образом:

$$P_{BC} > P_{BD} > P_{AB}.$$

Тогда по условию:

$$\frac{P_{BC}}{P_{BD}} = 3 = \frac{2}{3}\frac{R_1}{R_2} + \frac{1}{3},$$

$$\frac{8}{3} = \frac{2}{3}\frac{R_1}{R_2},$$

$$\frac{R_1}{R_2} = 4.$$

3) Теперь мы можем найти отношение наибольшей мощности к наименьшей мощности:

$$\frac{P_{BC}}{P_{AB}} = \frac{2R_1 + 2R_2}{3R_2} = \frac{2}{3}\frac{R_1}{R_2} + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} + \frac{2}{3} = \frac{10}{3}.$$

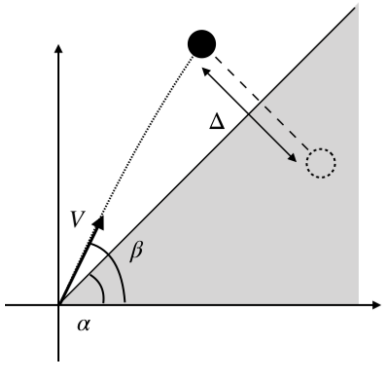
Ответ:

$$\frac{R_1}{R_2} = 4; \quad \text{наибольшая мощность относится к наименьшей мощности как } \frac{P_{BC}}{P_{AB}} = \frac{10}{3}.$$

Критерии

1. Верно записаны три возможных значения мощности. (+2 балла)
2. Верно записаны соотношения мощностей. (+1 балл)
3. Верно сделаны выводы о соотношении мощностей. (+1 балл)
4. Верно посчитаны соотношение сопротивлений,
   соотношение наибольшей и наименьшей мощностей. (+1 балл)

Задача 5. Зеркальная наклонная плоскость расположена под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. В начальный момент времени из некоторой точки на наклонной плоскости выпускают снаряд со скоростью $v = 3$ м/с под углом $\beta = 60°$ к горизонту, как показано на рисунке. Найдите момент времени, когда расстояние между снарядом и его изображением в зеркале будет максимальным. Ответ выразите в секундах и округлите до сотых.



Возможное решение

1) Выберем плоскость XY, соответствующую осям, изображенным в плоскости на рисунке. Точку старта снаряда примем за начало отсчета и запишем уравнения движения:

$$x = v_x t = v cos(\beta) t,$$

$$y = v_y t + \frac{gt^2}{2} = v sin(\beta) t - \frac{gt^2}{2}.$$

Тогда снаряд движется по кривой, соответствующей уравнению

$$y = tg(\beta)x - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_x^2}.$$

2) Найдем точку пересечения снаряда с наклонной плоскостью (т.к. наклонная плоскость расположена под углом $\alpha = 45°$ к горизонту, она задаётся уравнением $y = x$), то есть точку приземления:

$$x = tg(\beta)x - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_x^2},$$

$$0 = tg(\beta) - 1 - \frac{g}{2}\frac{x_0}{v_x^2}, \text{ где } x = x_0 \text{ – искомая точка пересечения},$$

$$x_0 = \frac{2(tg(\beta) - 1)v_x^2}{g}.$$

3) Для того, чтобы получить траекторию изображения снаряда в той же системе отсчета, нужно провести отражение исходной кривой относительно прямой $y = x$. Такое отражение можно осуществить, поменяв в уравнении исходной кривой x и y местами. Тогда кривая, вдоль которой двигается изображение, задается уравнениями:

$$x_{\text{c}} = y = tg(\beta)x - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_x^2},$$

$$y_{\text{c}} = x.$$

4) Найдем расстояние между изображением в зеркале и самим снарядом:

$$\Delta = \sqrt{(x_{\text{c}} - x)^2 + (y_{\text{c}} - y)^2},$$

$$\Delta = \sqrt{\left((tg(\beta) - 1)x - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_x^2}\right)^2 + \left((tg(\beta) - 1)x - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_x^2}\right)^2},$$

$$\Delta = \sqrt{2}\left((tg(\beta) - 1)x - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_x^2}\right).$$

Заметим, что кривая $\Delta(x)$ является параболой с ветвями вниз. Тогда максимальное значение $\Delta(x^\star)$ достигается в вершине параболы:

$$x^\star = \frac{(tg(\beta) - 1)v_x^2}{g}.$$

5) Заметим, что координата $x^\star$ меньше координаты x_0, в которой снаряд приземляется. Остается определить момент времени $t^\star$, когда расстояние между снарядом и его изображением в зеркале будет максимальным:

$$t^\star = \frac{x^\star}{v_x} = \frac{(tg(\beta) - 1)v_x}{g} = \frac{3(\sqrt{3} - 1)}{20} \text{ с} = 0{,}11 \text{ с}.$$

Ответ:

$$t^\star = 0{,}11 \text{ с}.$$

Критерии

1. Верно записана система уравнений для движения снаряда. (+1 балла)
2. Верно записана система уравнений для движения изображения снаряда. (+1 балл)
3. Верно найдена зависимость расстояния между снарядом и изображением от положения снаряда или от времени. (+1 балл)
4. Верно найдено значение координаты снаряда, при которой расстояние от снаряда до изображения максимально.(+1 балл)
5. Верно найден момент времени, в который расстояние между снарядом и изображением максимально. (+1 балл)