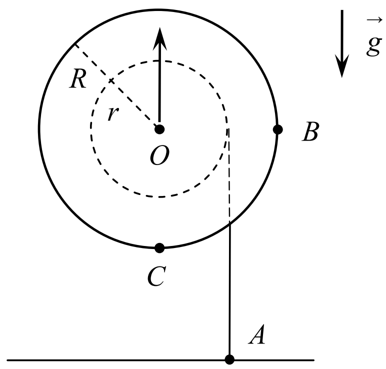
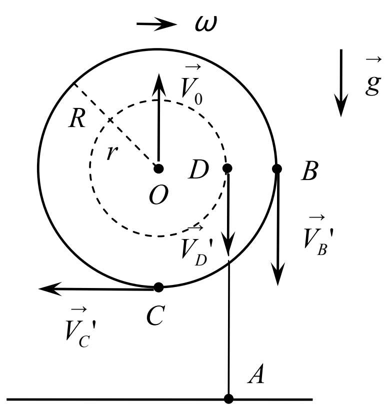
Задача 1 / 1. Катушка, состоящая из внутреннего цилиндра радиуса $r = 16$ мм и боковых колёс радиуса $R = 31$ мм, может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O. На внутренний цилиндр намотана тонкая нерастяжимая лента, вертикальный конец которой закреплён на полу в точке A. Ось катушки поднимают вертикально вверх. Считая, что лента натянута и не скользит по катушке, найдите отношение $x = V_B/V_C$, где V_B и V_C — мгновенные скорости точек B и C, лежащих на концах горизонтального и вертикального диаметров одного из боковых колёс. Ответ округлите до сотых.



Возможное решение



Обозначим через $\vec{V_0}$ мгновенную скорость точки O относительно пола и через ω мгновенноную угловую скорость вращения катушки вокруг этой точки. Найдём связь между V_0 и ω. Скорость всех точек вертикального участка ленты относительно пола равна нулю. В частности, это верно и для точки D, в которой этот участок касается внутреннего цилиндра катушки. Скорость точки D относительно пола равна:

$$\overrightarrow{V_D} = \overrightarrow{V_0} + \overrightarrow{V_D}\,',$$

где $\overrightarrow{V_D}\,'$ — линейная скорость точки D относительно точки O. Вектор $\overrightarrow{V_D}\,'$ направлен противоположно вектору $\overrightarrow{V_0}$ и по абсолютной величине равен $\omega\, r$. Из условия $\overrightarrow{V_D} = 0$ получаем:

$$V_0 = \omega\, r \quad \longrightarrow \quad \omega = \frac{V_0}{r}\,.$$

Рассмотрим теперь скорости точек B и C относительно пола:

$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_0} + \overrightarrow{V_B}\,', \qquad \overrightarrow{V_C} = \overrightarrow{V_0} + \overrightarrow{V_C}\,'.$$

Здесь $\overrightarrow{V_B}\,'$ и $\overrightarrow{V_C}\,'$ — линейные скорости рассматриваемых точек относительно точки O. По абсолютной величине они одинаковы:

$$V_B\,' = V_C\,' = \omega\, R = V_0\,\frac{R}{r}\,.$$

Вектор $\overrightarrow{V_B}\,'$ направлен противоположно $\overrightarrow{V_0}$. Так как $V_B\,' > V_0$, вектор скорости $\overrightarrow{V_B}$ направлен вертикально вниз. Его абсолютная величина равна:

$$V_B = V_B{}' - V_0 = V_0 \left(\frac{R}{r} - 1 \right) = \frac{V_0\,(\,R - r\,)}{r}\,.$$

Вектор $\overrightarrow{V_C}{}'$ перпендикулярен $\overrightarrow{V_0}$. Поэтому абсолютную величину скорости точки C находим по теореме Пифагора:

$$V_C = \sqrt{V_C{}'^{\,2} + V_0^2} = V_0 \sqrt{\left(\frac{R}{r} \right)^2 + 1} = \frac{V_0 \sqrt{R^2 + r^2}}{r}\,.$$

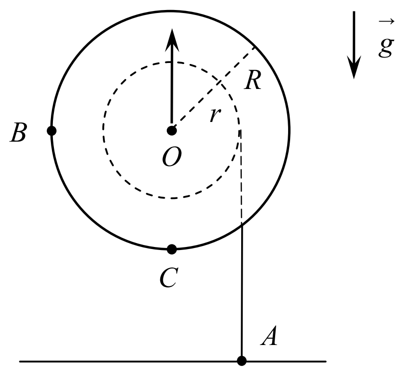
Отношение скоростей точек B и C равно:

$$x = \frac{V_B}{V_C} = \frac{R - r}{\sqrt{R^2 + r^2}} = 0{,}43\,.$$

Ответ:

$$x = \frac{R - r}{\sqrt{R^2 + r^2}} = 0{,}43\,.$$

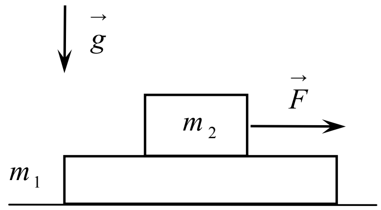
Задача 1 / 2. Катушка, состоящая из внутреннего цилиндра радиуса $r = 13$ мм и боковых колёс радиуса $R = 29$ мм, может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O. На внутренний цилиндр намотана тонкая нерастяжимая лента, вертикальный конец которой закреплён на полу в точке A. Ось катушки поднимают вертикально вверх. Считая, что лента натянута и не скользит по катушке, найдите отношение $x = V_B/V_C$, где V_B и V_C — мгновенные скорости точек B и C, лежащих на концах горизонтального и вертикального диаметров одного из „колёс“. Ответ округлите до десятых.



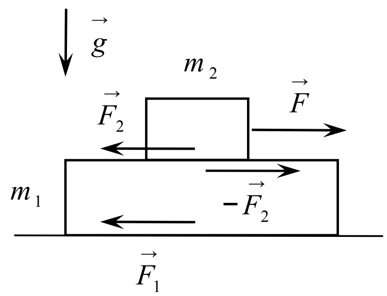
Ответ:

$$x = \frac{R + r}{\sqrt{R^2 + r^2}} = 1{,}3\,.$$

Задача 2 / 1. На длинном горизонтальном столе лежит доска массой $m_1 = 1{,}5$ кг. Коэффициент трения между доской и столом $\mu_1 = 0{,}04$. На доске стоит брусок массой $m_2 = 0{,}5$ кг. Коэффициент трения между бруском и доской $\mu_2 = 0{,}3$. На брусок начинает действовать горизонтальная сила, зависящая от времени по закону $F = k\,t$, где $k = 0{,}25$ Н/с. Найдите время τ, прошедшее от начала движения доски по столу до начала скольжения бруска по доске. Ответ выразите в секундах и округлите до десятых. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Возможное решение



На доску со стороны стола действует сила трения $\overrightarrow{F_1}$. На брусок со стороны доски действует сила трения $\overrightarrow{F_2}$. По третьему закону Ньютона брусок действует на доску силой $-\overrightarrow{F_2}$. Пока внешняя сила F мала, доска и брусок неподвижны и силы F_1 и F_2 являются силами трения покоя. В этом случае имеем равенства:

$$F_1 = F_2 = F\,.$$

Поскольку сила трения покоя не превосходит силу трения скольжения, максимальные значения сил F_1 и F_2 равны:

$$F_{1\,max} = \mu_1\,(\,m_1 + m_2\,)\,g = 0{,}8 \text{ Н}\,,$$

$$F_{2\,max} = \mu_2\,m_2\,g = 1{,}5 \text{ Н}\,.$$

При увеличении внешней силы F сначала будет достигнуто значение $F_{1\,max}$, то есть первой начнёт двигаться доска. Найдём момент времени t_1, когда это произойдёт:

$$F_{1\,max} = F\,, \quad \mu_1\,(\,m_1 + m_2\,)\,g = k\,t_1 \quad \longrightarrow \quad t_1 = \frac{\mu_1\,(\,m_1 + m_2\,)\,g}{k}\,.$$

При $t > t_1$ доска и брусок будут некоторое время двигаться как одно тело. Найдём ускорение этого движения:

$$(\,m_1 + m_2\,)\,a = F - \mu_1\,(\,m_1 + m_2\,)\,g \quad \longrightarrow \quad a = \frac{F}{m_1 + m_2} - \mu_1\,g\,.$$

Запишем второй закон Ньютона для бруска:

$$m_2\,a = F - F_2\,.$$

Выразим отсюда F_2:

$$F_2 = F - m_2\,a = F - \frac{m_2\,F}{m_1 + m_2} + \mu_1\,m_2\,g = \frac{m_1\,F}{m_1 + m_2} + \mu_1\,m_2\,g\,.$$

С ростом F сила F_2 увеличивается и в некоторый момент времени t_2 достигает своего максимального значения $F_{2\,max}$. В этот момент брусок начинает скользить по доске. Найдём время t_2:

$$\mu_2\,m_2\,g = \frac{m_1\,k\,t_2}{m_1 + m_2} + \mu_1\,m_2\,g \quad \longrightarrow \quad t_2 = \frac{(\,m_1 + m_2\,)\,g}{m_1\,k} \cdot (\,\mu_2 - \mu_1\,)\,m_2\,.$$

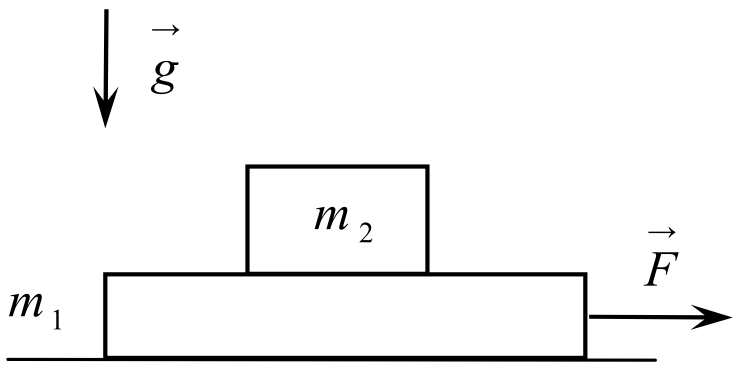
Искомое время τ равно:

$$\tau = t_2 - t_1 = \frac{(\,m_1 + m_2\,)\,g}{k}\left(\frac{m_2\,(\,\mu_2 - \mu_1\,)}{m_1} - \mu_1\right) = 3{,}7 \text{ с}\,.$$

Ответ:

$$\tau = \frac{(m_1 + m_2)\, g}{k} \left(\frac{m_2\, (\mu_2 - \mu_1)}{m_1} - \mu_1 \right) = 3{,}7 \text{ с} .$$

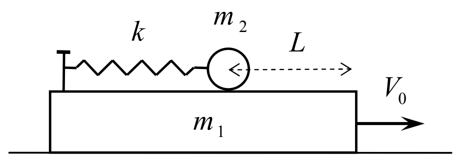
Задача 2 / 2. На длинном горизонтальном столе лежит доска массой $m_1 = 1{,}2$ кг. Коэффициент трения между доской и столом $\mu_1 = 0{,}15$. На доске стоит брусок массой $m_2 = 0{,}3$ кг. Коэффициент трения между бруском и доской $\mu_2 = 0{,}25$. На доску начинает действовать горизонтальная сила, зависящая от времени по закону $F = k\, t^2$, где $k = 0{,}2$ Н/с^2. Найдите время τ, прошедшее от начала движения доски по столу до начала скольжения бруска по доске. Ответ выразите в секундах и округлите до десятых. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Ответ:

$$\tau = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)\, g}{k}}\, \left(\sqrt{\mu_1 + \mu_2} - \sqrt{\mu_1} \right) = 2{,}1 \text{ с} .$$

Задача 3 / 1. На гладком горизонтальном столе стоит брусок массой $m_1 = 0{,}4$ кг. В левый край бруска вбит гвоздь, к которому прикреплена невесомая горизонтальная пружина жёсткости $k = 20$ Н/м. Другой конец пружины прикреплён к шарику массой $m_2 = 0{,}1$ кг. Расстояние от центра шарика до правого края бруска $L = 5$ см. Коротким ударом бруску сообщают скорость V_0, направленную вдоль пружины вправо. Найдите максимальное значение этой скорости, при котором шарик не соскочит с бруска. Ответ выразите в м/с и округлите до десятых. Считайте, что за время удара шарик не успел прийти в движение; трение не учитывайте.



Возможное решение

Максимальное значение V_0 соответствует случаю, когда на правом краю бруска скорость шарика относительно бруска обращается в нуль. При этом относительно стола шарик и брусок движутся с одной и той же скоростью V. По закону сохранения импульса

$$m_1 V_0 = (m_1 + m_2)\, V \quad \longrightarrow \quad V = \frac{m_1 V_0}{m_1 + m_2}\,.$$

Далее воспользуемся законом сохранения энергии:

$$\frac{m_1 V_0^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)\, V^2}{2} + \frac{k L^2}{2}\,, \qquad m_1 V_0^2 = (m_1 + m_2)\, V^2 + k L^2\,.$$

Подставляя сюда найденное значение V, находим V_0:

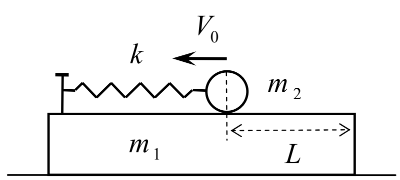
$$m_1 V_0^2 = (m_1 + m_2) \cdot \left(\frac{m_1 V_0}{m_1 + m_2}\right)^2 + k L^2\,, \qquad m_1 V_0^2 \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) = k L^2\,,$$

$$\frac{m_1 m_2 V_0^2}{m_1 + m_2} = k L^2 \quad \longrightarrow \quad V_0 = L \sqrt{\frac{k\,(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}} = 0{,}8 \text{ м/с}\,.$$

Ответ:

$$V_0 = L \sqrt{\frac{k\,(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}} = 0{,}8 \text{ м/с}\,.$$

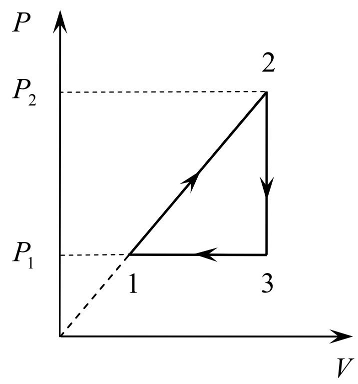
Задача 3 / 2. На гладком горизонтальном столе стоит брусок массой $m_1 = 0{,}25$ кг. В левый край бруска вбит гвоздь, к которому прикреплена невесомая горизонтальная пружина жёсткости $k = 10$ Н/м. Другой конец пружины прикреплён к шарику массой $m_2 = 0{,}05$ кг. Расстояние от центра шарика до правого края бруска $L = 4$ см. Коротким ударом шарику сообщают скорость V_0, направленную вдоль пружины влево. Найдите максимальное значение этой скорости, при котором шарик не соскочит с бруска. Ответ выразите в м/с и округлите до десятых. Считайте, что за время удара брусок не успел прийти в движение; трение не учитывайте.



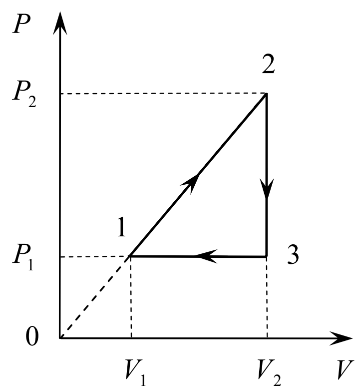
Ответ:

$$V_0 = L \sqrt{\frac{k\,(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}} = 0{,}6 \text{ м/с}\,.$$

Задача 4 / 1. Тепловой двигатель работает по замкнутому циклу, состоящему из трёх участков. Участок 1–2 — отрезок прямой, проходящей через начало координат на диаграмме P, V; 2–3 — изохорическое охлаждение, 3–1 — изобарическое сжатие. Рабочим веществом является газовая смесь, состоящая из ν_1 молей гелия и ν_2 молей молекулярного азота N_2. Известно отношение давлений смеси в состояниях 2 и 1: $P_2/P_1 = 2$. КПД двигателя $\eta = 6{,}5$ %. Найдите отношение x числа молей гелия и азота: $x = \nu_1/\nu_2$. Ответ округлите до сотых.



Возможное решение



Найдём связь объёмов и температур в состояниях 1 и 2. Из подобия треугольников $0\,1\,V_1$ и $0\,2\,V_2$ получаем:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{P_2}{P_1} = 2 \quad \longrightarrow \quad V_2 = 2\,V_1\,.$$

Запишем уравнение состояния газовой смеси в точках 1 и 2:

$$P_1\,V_1 = \nu R\,T_1\,, \qquad P_2\,V_2 = \nu R\,T_2\,.$$

Здесь $\nu = \nu_1 + \nu_2$ — полное число молей смеси, R — универсальная газовая постоянная. Поделив второе уравнение на первое, получаем:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1}\cdot\frac{V_2}{V_1} = 4 \quad \longrightarrow \quad T_2 = 4\,T_1\,.$$

Работу газовой смеси за цикл вычислим как площадь треугольника $1\,2\,3$:

$$A = \frac{1}{2}\,(\,P_2 - P_1\,)\,(\,V_2 - V_1\,) = \frac{1}{2}\,P_1\,V_1 = \frac{1}{2}\,\nu R\,T_1\,.$$

Газовая смесь получает тепло на участке 1–2. Подведённое количество теплоты равно:

$$Q = \frac{3}{2}\,\nu_1 R\,(\,T_2 - T_1\,) + \frac{5}{2}\,\nu_2 R\,(\,T_2 - T_1\,) + A_{1\,2} = \frac{3}{2}\,(\,3\,\nu_1 + 5\,\nu_2\,)\,R\,T_1 + A_{1\,2}\,,$$

$A_{1\,2}$ — работа газовой смеси на участке 1–2. Вычислим эту работу как площадь трапеции $V_1\,1\,2\,V_2$:

$$A_{1\,2} = \frac{1}{2}\,(\,P_1 + P_2\,)\,(\,V_2 - V_1\,) = \frac{3}{2}\,P_1\,V_1 = \frac{3}{2}\,\nu R\,T_1\,.$$

Для подведённого количества теплоты получаем:

$$Q = \frac{3}{2}\,(\,3\,\nu_1 + 5\,\nu_2\,)\,R\,T_1 + \frac{3}{2}\,(\,\nu_1 + \nu_2\,)\,R\,T_1 = 3\,(\,2\,\nu_1 + 3\,\nu_2\,)\,R\,T_1\,.$$

КПД двигателя равен:

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{\nu_1 + \nu_2}{6\,(\,2\,\nu_1 + 3\,\nu_2\,)} = \frac{x+1}{6\,(\,2x+3\,)}\,,$$

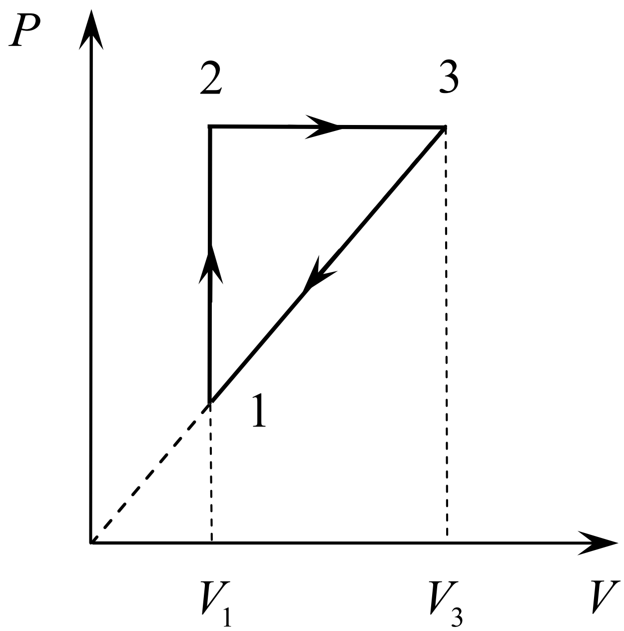
где $x = \nu_1/\nu_2$. Отсюда находим отношение числа молей:

$$12\,\eta\,x + 18\,\eta = x + 1 \quad \longrightarrow \quad x = \frac{18\,\eta - 1}{1 - 12\,\eta} = 0{,}77\,.$$

Ответ:

$$x = \frac{18\,\eta - 1}{1 - 12\,\eta} = 0{,}77\,.$$

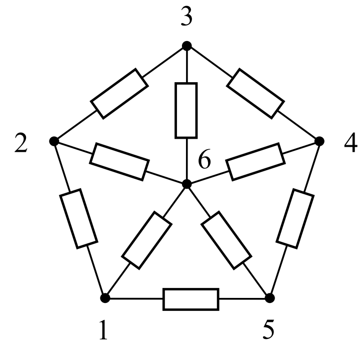
Задача 4 / 2. Тепловой двигатель работает по замкнутому циклу, состоящему из трёх участков. Участок 1–2 — изохорическое нагревание, 2–3 — изобарическое расширение, 3–1 — отрезок прямой, проходящей через начало координат на диаграмме P, V. Рабочим веществом является газовая смесь, состоящая из ν_1 молей гелия и ν_2 молей молекулярного азота N_2. Известно отношение объёмов смеси в состояниях 3 и 1: $V_3/V_1 = 2$. КПД двигателя $\eta = 7$ %. Найдите отношение x числа молей гелия и азота: $x = \nu_1/\nu_2$. Ответ округлите до десятых.



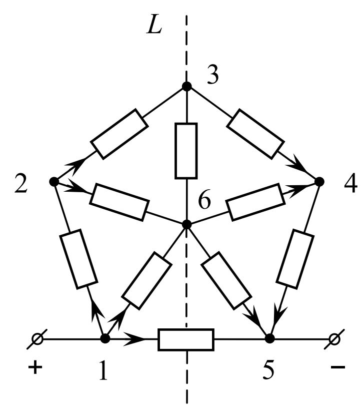
Ответ:

$$x = \frac{19\,\eta - 1}{1 - 13\,\eta} = 3{,}7\,.$$

Задача 5 / 1. Плоский каркас собран из десяти одинаковых сопротивлений, соединённых в точках 1 — 6. Каркас подключён к источнику постоянного напряжения за точки 1 и 5. Найдите отношение $x = P_{45}/P_0$, где P_{45} — тепловая мощность, выделяющаяся на участке 4–5; P_0 — тепловая мощность, выделяющаяся на всём каркасе. Ответ округлите до тысячных.



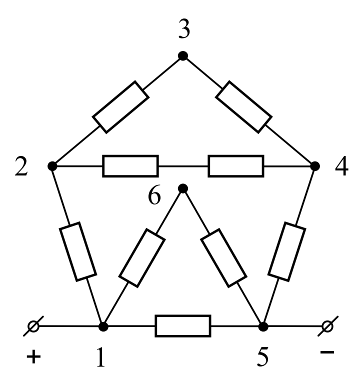
Возможное решение



Пусть положительный полюс батареи подключён к точке 1, а отрицательный к точке 5. Рассматриваемая схема зеркально симметрична относительно прямой L, проходящей через точки 3 и 6. Поэтому распределение токов также зеркально симметрично. Это означает, что выполняются следующие равенства:

$$I_{23} = I_{34}\,, \qquad I_{26} = I_{46}\,, \qquad I_{16} = I_{56}\,.$$

Здесь нижние индексы указывают участки, по которым текут соответствующие токи. В силу этих равенств ток на участке 3–6 равен нулю и этот участок можно убрать из схемы. Кроме того, можно разъединить точку 6. В результате получаем упрощённую схему.

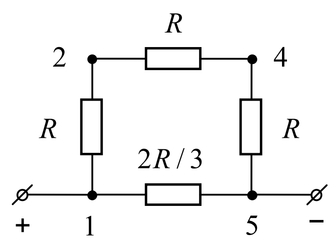


Обозначим через R каждое из исходных сопротивлений. В получившейся схеме верхний треугольник 234 состоит из двух сопротивлений $2\,R$, соединённых параллельно. Общее сопротивления этого треугольника равно:

$$\frac{2\,R \cdot 2\,R}{2\,R + 2\,R} = R\,.$$

Нижний треугольник 156 состоит из сопротивлений R и $2\,R$, также соединённых параллельно. Его общее сопротивления равно:

$$\frac{R \cdot 2\,R}{R + 2\,R} = \frac{2\,R}{3}\,.$$



Получаем совсем простую схему, с помощью которой находим общее сопротивление исходного каркаса:

$$R_0 = \frac{3\,R \cdot (\,2\,R/3\,)}{3\,R + (\,2\,R/3\,)} = \frac{6\,R}{11}\,.$$

Тепловая мощность, выделяющаяся на всём каркасе, равна:

$$P_0 = \frac{V^{\,2}}{R_0} = \frac{11\,V^{\,2}}{6\,R}\,,$$

V — напряжение, поданное на точки 1 и 5. Сила тока, текущего по участку 4–5, равна:

$$I_{45} = \frac{V}{3\,R}\,.$$

Тепловая мощность, выделяющаяся на этом участке:

$$P_{45} = I_{45}^2\,R = \frac{V^{\,2}}{9\,R}\,.$$

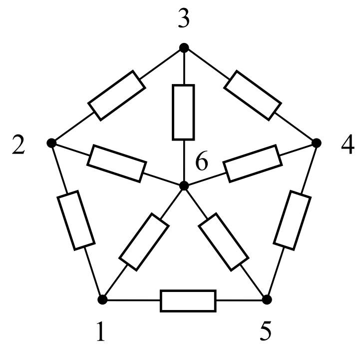
Отношение мощностей:

$$x = \frac{P_{45}}{P_0} = \frac{6}{9 \cdot 11} = \frac{2}{33} = 0{,}061\,.$$

Ответ:

$$x = \frac{2}{33} = 0{,}061\,.$$

Задача 5 / 2. Плоский каркас собран из десяти одинаковых сопротивлений, соединённых в точках 1 — 6. Каркас подключён к источнику постоянного напряжения за точки 2 и 4. Найдите отношение $x = P_{56}/P_0$, где P_{56} — тепловая мощность, выделяющаяся на участке 5–6; P_0 — тепловая мощность, выделяющаяся на всём каркасе. Ответ округлите до тысячных.



Ответ:

$$x = \frac{1}{88} = 0{,}011\,.$$