7 класс

Задача 7.1. Назовём натуральное число *почти квадратом*, если оно имеет вид $a^2 - 1$ для некоторого натурального числа $a > 1$. Докажите, что существует бесконечно много пар почти квадратов, чьё произведение — тоже почти квадрат.

Решение. Возьмем соседние почти квадраты: $(a+1)^2 - 1$ и $a^2 - 1$. Тогда их произведение равно

$$\big((a+1)^2-1\big)\cdot\big(a^2-1\big) = (a+1)^2\cdot a^2-(a+1)^2-a^2+1 = (a^2+a)^2-(a^2+2a+1)-a^2+1 =$$
$$= (a^2+a)^2 - 2(a^2+a+1) + 1 = (a^2+a-1)^2 - 1.$$

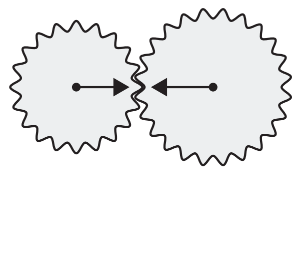
Таким образом, в произведении получается почти квадрат. Выбирая произвольные соседние почти квадраты и перемножая их, получаем бесконечно много пар почти квадратов.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 4 б. Решение в целом верное, но допущена вычислительная ошибка.
- 2 б. Рассмотрено произведение соседних почти квадратов, но не доказано, что их произведение — почти квадрат.
- 0 б. Рассмотрены отдельные частные случаи, не порождающие бесконечное количество примеров.

Задача 7.2. Две шестерёнки с 20 и 24 одинаковыми зубцами сцеплены между собой, а на шестерёнках нарисованы две стрелки (см. рис.). Малая шестерёнка поворачивается на один зубец по часовой стрелке каждую секунду (движение не плавное). Через какое время стрелки на шестерёнках впервые будут смотреть в одинаковом направлении, если в начальный момент времени они смотрят друг на друга?



Ответ: Через 1 минуту.

Решение. Рассмотрим угол между стрелками, если бы мы их откладывали от одной точки. В начальный момент времени угол равен $180°$.

Каждую секунду малая шестерёнка поворачивается на угол $360° : 20 = 15°$, а большая — на угол $360° : 24 = 18°$. Тогда угол между стрелками изменяется на угол $15° + 18° = 33°$.

Чтобы стрелки смотрели в одном направлении, необходимо, чтобы угол изменился на $180° + 360° \cdot n$, где n — целая величина. Выразим изменение угла между стрелками через время s секунд:

$$33° \cdot s = 180° + 360° \cdot n.$$

Опустим знак градуса и найдём наименьшее положительное значение s из данного уравнения. Поскольку, обе части равенства имеют целые значения, то выражение слева делится на 180. Значит, s кратно 60, и наименьшее значение $s = 60$ (секунд).

Замечание. Получается, что при данных условиях стрелки могут смотреть в одном направлении только, если они обе смотрят вправо.

Критерии

- 7 б. Приведён верный ответ и верное решение с обоснованием.
- 3 б. В целом решение верное, но допущена арифметическая ошибка.

В остальных случаях критерии суммируются:

- +1 б. Верно вычислено изменение угла между стрелками за одну секунду.
- +1 б. Верно составлено уравнение, связывающее время и сонаправленность стрелок.

Задача 7.3. За круглым столом должны собраться рыцари Круглого стола. Место каждого рыцаря было обозначено табличкой с его именем. Однако в спешке рыцари расселись как попало, в результате чего ни один из них не оказался на своём месте. Докажите, что все рыцари могут сдвинуться по кругу на некоторое количество мест так, чтобы как минимум двое оказались на своих местах.

Решение. Пусть все рыцари, которых n человек, последовательно сдвигаются по кругу на одно место, пока не вернутся на те места, на которых сидели изначально. Заметим, что каждый рыцарь побывал на n местах, причем ровно один раз он сидел на своем месте. Значит, за все время сдвигов всего n рыцарей побывало на своих местах. Раз в стартовый момент времени никто не сидел на своем месте, то среди оставшихся $n-1$ позиций по принципу Дирихле должна найтись такая, в которой как минимум два рыцаря занимают свои места, что и требовалось доказать.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 2 б. Присутствует идея пересаживания рыцарей по кругу, но рассуждение не доведено до конца.
- 0 б. Задача решена в частных случаях, других продвижений нет.

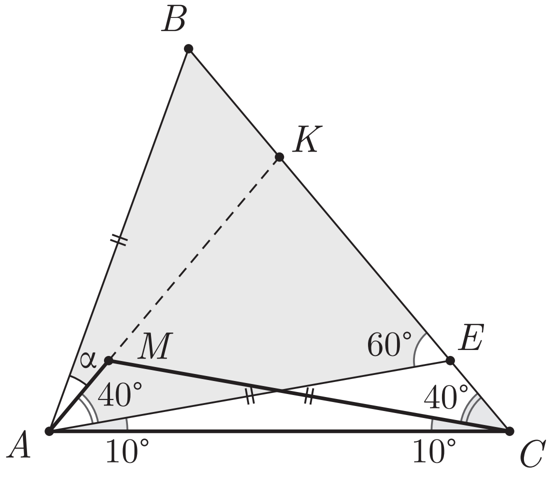
Задача 7.4. В треугольнике ABC взяли точку M так, что $CM = AB$. Оказалось, что углы ACM и CAM соответственно равны 10° и 50°, а угол BCM равен 40°. Найдите угол BAM.

Ответ: 20°.

Решение. Продолжим отрезок AM до пересечения со стороной BC в точке K. На отрезке CK отметим такую точку E, что угол ACE равен 10°.

Тогда треугольники AEC и CAM равны по стороне и прилегающим к ней углам. Поэтому $AE = CM = AB$.

Угол AEB равен 60° как внешний для треугольника AEC. Тогда треугольник ABE равносторонний, поэтому искомый угол BAM равен $60^\circ - 40^\circ = 20^\circ$.

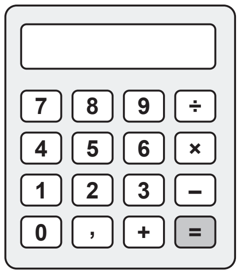


Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 6 б. В решении получен верный ответ, но использовались соображения симметрии без ссылки на равенство треугольников.ф
- 1 б. Ответ не получен, но сделано разумное дополнительное построение с симметричным треугольником .

Задача 7.5. На рисунке изображена схема калькулятора и всех его кнопок (набор цифр, запятая-разделитель дробной части, 4 арифметических действия и вывод на экран). На экране выведено некоторое число от 8 000 до 12 000. Всегда ли можно за 5 нажатий кнопок калькулятора (последнее нажатие должно быть на кнопку вывода “=”) изменить число на экране так, чтобы оно отличалось от 10 000 менее, чем на 2%?



Ответ: Нет, не всегда.

Решение. По сути нам нужно выяснить, можно ли гарантировано получить на калькуляторе число в диапазоне от 9 800 до 10 200 за 5 нажатий.

Рассмотрим число 8 165 и докажем, что за 5 нажатий привести его к нужному диапазону не получится.

Для начала поймём, какие варианты нажатий могут быть. Так как последнее нажатие это знак равенства, то предпоследнее, это нажатие на цифру. Также, очевидно, что первое нажатие является арифметическим действием, и значит, второе нажатие может быть только цифрой (знак минус при прочих вариантах не может дать результат лучше). Итак, у нас несколько вариантов:

$$\boxed{op}\ \boxed{N}\ \boxed{N}\ \boxed{N}$$

$$\boxed{op}\ \boxed{N}\ \boxed{op}\ \boxed{N}$$

$$\boxed{op}\ \boxed{N}\ \boxed{,}\ \boxed{N}$$

В первом варианте число изменяется слишком сильно (если производится операция умножения или деления на трёхзначное число) или, наоборот, изменяется недостаточно (если производится сложение или вычитание с трёхзначным числом).

Использование сложения или вычитания во втором или третьем варианте не подходит по тем же причинам — либо число изменятся слишком сильно (при делении или умножении на целое число, большее 1), либо слишком мало (если основное изменение получается засчёт операции сложения/вычитания.

Остаются варианты:

$$\boxed{\div}\ \boxed{N}\ \boxed{\times}\ \boxed{N}$$

$$\boxed{\times}\ \boxed{N}\ \boxed{\div}\ \boxed{N}$$

$$\boxed{\div}\ \boxed{N}\ \boxed{,}\ \boxed{N}$$

$$\boxed{\times}\ \boxed{N}\ \boxed{,}\ \boxed{N}$$

Для числа 8 165 проверим следующие комбинации:

1. $\boxed{\times}\ \boxed{6}\ \boxed{\div}\ \boxed{5}$ (или $\boxed{\div}\ \boxed{5}\ \boxed{\times}\ \boxed{6}$, или $\boxed{\times}\ \boxed{1}\ \boxed{,}\ \boxed{2}$)

$$8\,165 \cdot \frac{6}{5} = 9\,798 < 9\,800$$

2. $\boxed{\times}\ \boxed{5}\ \boxed{\div}\ \boxed{4}$ (или $\boxed{\div}\ \boxed{4}\ \boxed{\times}\ \boxed{5}$, или $\boxed{\div}\ \boxed{0}\ \boxed{,}\ \boxed{8}$)

$$8\,165 \cdot \frac{5}{4} = 10\,206{,}25 > 10\,200$$

Как видно, нижняя и верхняя границы выходят за рамки необходимых нам. Остальные комбинации из отобранных вариантов либо будут давать результат ещё меньше, чем нижняя граница, либо ещё больше, чем верхняя граница.

Замечание. Для того, чтобы найти число-контрпример, можно решить линейное уравнение:

$$10\,000 - \frac{6}{5}x = \frac{5}{4}x - 10\,000$$

и найти пограничное число:

$$x = \frac{400\,000}{49} = 8\,163\frac{13}{49}$$

Вообще, контрпримером может служить любое число в интервале $\left(8\,160; 8\,166\frac{2}{3}\right)$.

Критерии

- 7 б. Приведён верный контрпример и верное решение с обоснованием.
- 6 б. Приведён верный контрпример и в целом верное решение, но проверка некоторых некритичных но возможных комбинаций действий с калькулятором была пропущена.

В остальных случаях критерии суммируются:

- +2 б. Приведено обоснование, как получить искомое число на экране для всех чисел задачи кроме диапазона длины 50 или меньше (например, для всех чисел от 8000 до 12000 кроме чисел от 8150 до 8200).
- +1 б. Правильно сделана классификация всех возможных комбинаций действий с калькулятором при условии задачи.
- +1 б. Правильно сделан отсев комбинаций действий с калькулятором, использующих операции $\boxed{+}$ и $\boxed{-}$ для предполагаемого числа-контрпримера.