

Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2024

Заключительный этап 7 апреля

11 класс

Задача 11.1. Последовательность натуральных чисел a_0, a_1, a_2, \dots определяется следующими соотношениями: $a_0 = 1, a_n = kn + (-1)^n a_{n-1}$, где k – фиксированное натуральное число. Сколько существует таких последовательностей, в которых встречается число 2024?

Задача 11.2. На доске написано 20-буквенное слово, состоящее только из букв А и В. Назовем *крутизной* слова количество способов стереть некоторые его буквы так, чтобы на доске остались четыре буквы, образующих комбинацию АВВА. Например, слово АВВААВ имеет крутизну 2, поскольку нужную комбинацию можно получить двумя способами: АВВААВ и АВВААВ. Какова наибольшая возможная крутизна слова, выписанного на доске?

Задача 11.3. Аня и Боря играют в игру. Они по очереди (начинает Аня) выписывают по одной цифре, пока не получится шестизначное число. При этом первая выписанная цифра ненулевая и все выписанные цифры различны. Аня выигрывает, если полученное шестизначное число делится хотя бы на одно из чисел: 2, 3 или 5. Если этого не случается, то выигрывает Боря. Кто выигрывает при правильной игре?

Задача 11.4. По плоскости ползут три улитки. Каждая улитка движется со своей скоростью прямолинейно и равномерно. Известно, что в некоторые три момента времени все улитки оказывались на одной прямой. Могут ли улитки в какой-то момент времени оказаться в вершинах правильного треугольника?

Задача 11.5. В пирамиде $SABCD$ с вершиной S известно, что $AB = 9, BC = 5$ и $CD = 13$. Найдите длину ребра AD , если вписанная в пирамиду сфера касается основания в точке пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$.

Задача 11.6. На координатной плоскости Oxy рассматривается угол, образованный прямыми $y = x$ и $y = -2x$, целиком лежащий в полуплоскости $y \geq 0$. Среди всех парабол вида $y = ax^2 + bx + c$, каждая точка которых находится внутри этого угла либо на его границе, найдите ту параболу, которая принимает наименьшее значение в точке $x = 2$.