10-11 классы.

Задача 1.1.
Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x^y = 2^{2^{2^2}}$?

Ответ: 17.

Решение. Перепишем уравнение в виде $x^y = 2^{2^{16}}$. Число x является степенью двойки. Пусть $x = 2^k$, тогда $y = \frac{2^{16}}{k}$, то есть k является делителем числа 2^{16}, а тогда существует ровно 17 вариантов, при этом x и y однозначно определяются значением k. Таким образом, количество решений равно 17. $\square$

Задача 1.2.
Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x^y = 3^{3^{3^3}}$?

Ответ: 28.

Задача 1.3.
Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x^y = 7^{5^{3^2}}$?

Ответ: 10.

Задача 2.1.
По шоссе едет легковой автомобиль со скоростью x км/ч. На расстоянии 100 метров перед ним едет грузовой автомобиль со скоростью 60 км/ч. Легковой автомобиль собирается совершить обгон в момент, когда по встречной полосе на расстоянии 1 км от него едет мотоциклист со скоростью 120 км/ч. С какой наименьшей скоростью x, где x – целое число, нужно ехать легковому автомобилю, чтобы безопасно совершить обгон грузового автомобиля, если для этого необходимо на момент завершения манёвра находиться не менее чем в 60 метрах от грузового автомобиля и не менее чем в 120 метрах от мотоциклиста?

Ответ: 100.

Решение. Пусть t ч — время, которое потребовалось легковому автомобилю для совершения манёвра. Запишем условия, при которых обгон будет считаться безопасным:

1) К моменту совершения манёвра легковой автомобиль пройдёт расстояние $xt = 0{,}1 + 60t + y$, где $y \geqslant 0{,}06$ км — расстояние, на которое легковой автомомбиль опередил грузовой. Таким образом, $xt - 60t = 0{,}1 + y \geqslant 0{,}16$. Откуда $t \geqslant \frac{0{,}16}{x-60}$.

2) Так как на момент совершения обгона легковой автомобиль должен находиться не менее, чем в 120 метрах от мотоциклиста, то $(x + 120)t \leqslant 0{,}88$. Тогда,

учитывая полученное неравенство в пункте (1): $0{,}16 \cdot (x+120) \leqslant 0{,}88 \cdot (x-60)$. После преобразований получим, что $x \geqslant 100$.

Таким образом, $x = 100$ км/ч — искомая скорость. □

Задача 2.2.
По шоссе едет легковой автомобиль со скоростью x км/ч. На расстоянии 100 метров перед ним едет грузовой автомобиль со скоростью 70 км/ч. Легковой автомобиль собирается совершить обгон в момент, когда по встречной полосе на расстоянии 1 км от него едет мотоциклист со скоростью 110 км/ч. С какой наименьшей скоростью x, где x – целое число, нужно ехать легковому автомобилю, чтобы безопасно совершить обгон грузового автомобиля, если для этого необходимо на момент завершения манёвра находиться не менее чем в 70 метрах от грузового автомобиля и не менее чем в 110 метрах от мотоциклиста?

Ответ: 113.

Задача 3.1.
Сколько существует способов выбрать два различных натуральных делителя числа 10^7 так, чтобы их сумма была кратна трём?

Ответ: 1024.

Решение. Любой делитель числа 10^7 имеет вид $2^x \cdot 5^y$, где $0 \leqslant x \leqslant 7, 0 \leqslant y \leqslant 7$. При этом $2^x \cdot 5^y \underset{3}{\equiv} (-1)^{x+y}$. Тогда для того, чтобы сумма двух делителей была кратна трём, у этих делителей должна быть разная чётность $x+y$. Количество способов выбрать пару чисел (x, y) одной чётности равно $2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$, разной чётности — также $2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$, тогда искомое число способов равно $32^2 = 1024$. □

Задача 3.2.
Сколько существует способов выбрать два различных натуральных делителя числа 2500000 так, чтобы их сумма была кратна трём?

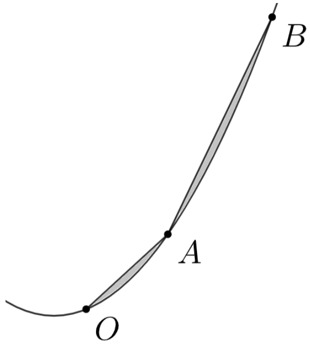
Ответ: 576.

Задача 3.3.
Сколько существует способов выбрать два различных натуральных делителя числа 1600000 так, чтобы их сумма была кратна трём?

Ответ: 900.

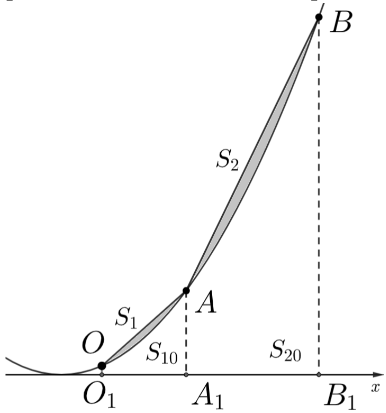
Задача 4.1.
На параболе $y = x^2$ отмечены точки $O(1, 1)$ и $B(11, 121)$. Найдите абсциссу

такой точки A на этой параболе, что сумма обозначенных на рисунке площадей наименьшая.



Ответ: 6.

Решение. Опустим перпендикуляры OO_1, AA_1 и BB_1 на ось x. Обозначим искомые площади как S_1 и S_2 (см. рисунок). Также обозначим за S_{10} площадь, ограниченную осью x, прямыми OO_1 и AA_1 и параболой, и за S_{20} площадь, ограниченную осью x, прямыми AA_1 и BB_1 и параболой.



Тогда искомая сумма равна $S_1+S_2 = S_{O_1OAA_1}+S_{A_1ABB_1}-(S_{10}+S_{20})$. Заметим, что при заданных координатах точек O и B сумма $S_{10}+S_{20}$ не зависит от положения точки A. Тогда для того, что сумма S_1+S_2 была наименьшей, нужно, чтобы сумма $S_{O_1OAA_1}+S_{A_1ABB_1}$ была наименьшей.

Пусть точка A имеет координаты (a, a^2). Выражая сумму площадей трапеций O_1OAA_1 и A_1ABB_1, получим:

$$S_{O_1OAA_1}+S_{A_1ABB_1} = \frac{1}{2}(OO_1+AA_1)\cdot O_1A_1 + \frac{1}{2}(AA_1+BB_1)\cdot A_1B_1 =$$

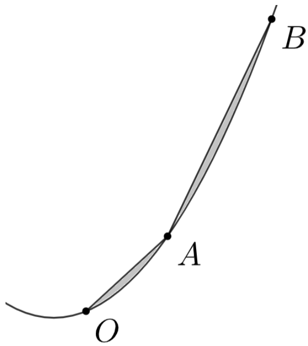
$$= \frac{1}{2}(1+a^2)\cdot(a-1) + \frac{1}{2}(a^2+121)\cdot(11-a) =$$

$$= \frac{1}{2}(a + a^3 - 1 - a^2 + 11a^2 + 11^3 - a^3 - 11^2 a) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(a^2(11-1) - a(11^2 - 1) + 11^3 - 1\right).$$

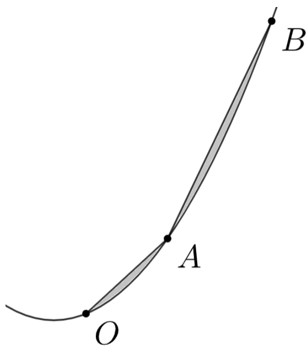
Полученное выражение описывает параболу с ветвями, направленными вверх. Таким образом, наименьшее значение принимается в точке $a = \frac{11^2-1}{2\cdot(11-1)} = 6$. $\square$

Задача 4.2.
На параболе $y = x^2$ отмечены точки $O(1,1)$ и $B(17,289)$. Найдите абсциссу такой точки A на этой параболе, что сумма обозначенных на рисунке площадей наименьшая.



Ответ: 9.

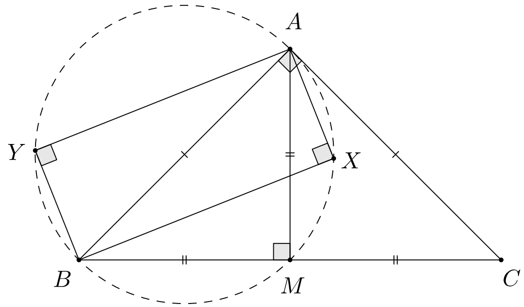
Задача 4.3.
На параболе $y = x^2$ отмечены точки $O(1,1)$ и $B(21,441)$. Найдите абсциссу такой точки A на этой параболе, что сумма обозначенных на рисунке площадей наименьшая.



Ответ: 11.

Задача 5.1.
Пусть ABC – равнобедренный прямоугольный треугольник, в котором $AB = AC$, точка M – середина стороны BC. Построим прямоугольник $AXBY$ такой, что X лежит внутри $\triangle ABC$ и $YM = 8\sqrt{2}$. Найдите площадь четырехугольника $AXBC$, если известно, что $AY^3 + BY^3 = 12^3$.

Ответ: 54.



Решение. Поскольку $\triangle ABC$ – равнобедренный с основанием BC, то медиана AM также является высотой. Тогда $\angle AYB = \angle AMB = 90°$, откуда четырехугольник $AMBY$ — вписанный. Введём обозначения: $AY = a$, $BY = b$. Тогда по теореме Птолемея для вписанного четырёхугольника $AMBY$:

$$AB \cdot YM = AM \cdot b + BM \cdot a.$$

Так как AM – медиана прямоугольного $\triangle ABC$, опущенная на гипотенузу, то $AM = BM$. Тогда $\triangle AMB$ также является прямоугольным равнобедренным, откуда по теореме Пифагора $AB = AM\sqrt{2}$. С другой стороны, $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ по теореме Пифагора для $\triangle AYB$.

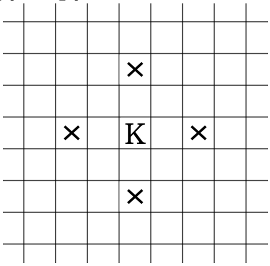
Таким образом, равенство, полученное из теоремы Птолемея, можно переписать в виде $AM\sqrt{2} \cdot YM = AM \cdot b + AM \cdot a$, откуда $\sqrt{2}YM = a + b$ и, подставляя $YM = 8\sqrt{2}$, $a+b = 16$. Также из условия задачи $a^3+b^3 = (a+b)(a^2+b^2-ab) = 12^3$. Откуда $16 \cdot (a^2 + b^2 - ab) = 12^3$.

Тогда искомая площадь равна $S_{AXBC} = S_{ABC} - S_{AXB} = \frac{a^2+b^2-ab}{2} = 54$. □

Задача 5.2. Пусть ABC – равнобедренный прямоугольный треугольник, в котором $AB = AC$, точка M – середина стороны BC. Построим прямоугольник $AXBY$ такой, что X лежит внутри $\triangle ABC$ и $YM = 16\sqrt{2}$. Найдите площадь четырехугольника $AXBC$, если известно, что $AY^3 + BY^3 = 28^3$.

Ответ: 343.

Задача 6.1.
Фигура «крот» бьёт все клетки ровно через одну по горизонтали или вертикали (см. рисунок). Какое наибольшее число кротов можно расставить на доске 16×16 так, чтобы они не били друг друга?

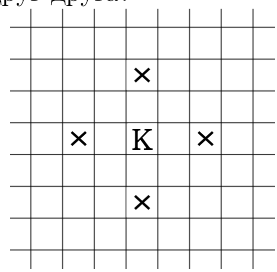


Ответ: 128.

Решение. Покажем, что на доску можно поставить 128 не бьющих друг друга кротов. Разобьём всю доску на квадраты 2×2 и покрасим эти квадраты в шахматную раскраску. После чего поставим кротов только в квадраты белого цвета. Нетрудно убедиться, что при такой растановке кроты не бьют друг друга.

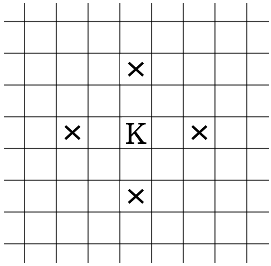
Докажем, что кроты не могут занимать больше половины клеток доски. Для этого разобьём всю доску на 64 прямоугольника 1×4. Тогда в каждом таком прямоугольнике может находиться не более двух кротов. $\square$

Задача 6.2.
Фигура «крот» бьёт все клетки ровно через одну по горизонтали или вертикали (см. рисунок). Какое наибольшее число кротов можно расставить на доске 12×12 так, чтобы они не били друг друга?



Ответ: 72.

Задача 6.3.
Фигура «крот» бьёт все клетки ровно через одну по горизонтали или вертикали (см. рисунок). Какое наибольшее число кротов можно расставить на доске 20×20 так, чтобы они не били друг друга?



Ответ: 200.