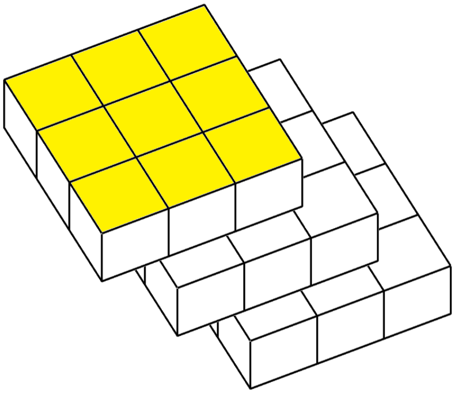
6-7 классы.

Задача 1. У Пети есть 27 белых деревянных кубиков. Он сложил из них куб $3 \times 3 \times 3$ и покрасил жёлтой краской все его грани. После высыхания краски он снова разобрал куб и заметил, что краска затекала в стыки между кубиками, в результате чего были испачканы ещё некоторые грани маленьких кубиков. А именно, если Петя окрашивал грани двух соседних кубиков, то оказывались в краске ещё и грани этих кубиков, которыми они соприкасались, и только они. На рисунке показан пример того, как если бы Петя взял только два кубика, сложил бы их в брусочек $2 \times 1 \times 1$ и окрасил только одну его грань, в результате чего у этих двух кубиков суммарно оказалось бы 4 грани в краске, а 8 их граней остались бы белыми.

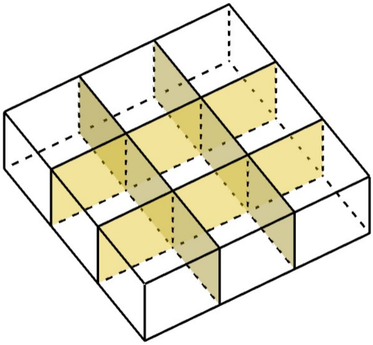
Вариант 1. Сколько всего граней у 27 кубиков остались белыми?
Вариант 2. На скольких гранях есть краска?

Решение. Рассмотрим куб $3 \times 3 \times 3$ до того, как Петя начал его раскрашивать, и понаблюдаем за процессом покраски. Пронумеруем грани большого куба от 1 до 6. Пусть Петя покрасил грань большого куба с номером 1. Разложим теперь куб на три слоя $3 \times 1 \times 1$, так, что верхний слой целиком содержит покрашенную грань куба (см. рисунок).

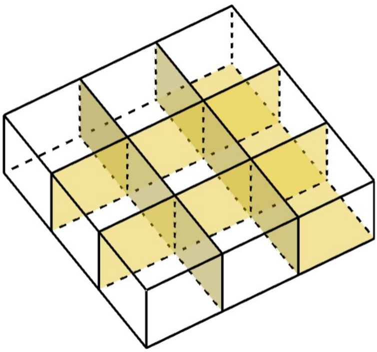
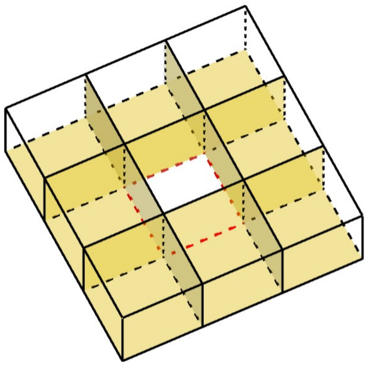


Так как пока окрашена только одна грань куба, которая целиком содержится в верхнем слое, то на среднем и нижнем слоях ни одна из граней маленьких кубиков не окрашена даже в результате затекания краски.

Будем наблюдать только за выделенным верхним слоем этого куба. Назовем его слоем, соответствующим грани с номером 1. На рисунке ниже изображен этот слой куба после окрашивания грани 1. Для удобства будем отмечать цветом только те грани, которые оказались жёлтыми исключительно в результате затекания краски.



Пусть теперь Петя покрасил ещё одну грань куба, соседнюю с уже покрашенной. Тогда в результате затекания краски на верхнем слое окажется ещё три окрашенные грани маленьких кубиков (см. рисунок слева). А после полного окрашивания куба верхний слой примет вид как на рисунке справа.

Заметим, что оказались окрашены все грани маленьких кубиков верхнего слоя, кроме одной (на рисунке отмечена красным цветом).

Отметим, что при повторении наблюдений для случаев, когда первой Петя раскрасил грань с любым другим номером, то вид слоя, соответствующего этому номеру, для каждого из случаев будет аналогичным. Откуда следует, что после полного окрашивания белыми остались только грани центрального кубика, а также по одной грани каждого из шести кубиков, которые соприкасались с центральным. Итого, суммарно <u>белыми остались 12 граней маленьких кубиков</u>. При этом всего у 27 кубиков $27 \cdot 6 = 162$ грани, 12 из которых остались белыми, значит, остальные <u>150 граней оказались в краске</u>. □

Ответ:

Вариант 1. Белыми остались 12 граней.

Вариант 2. В краске оказались 150 граней.

Задача 2.1. Учительница дала Диме задание найти простые делители четырёхзначного числа $\overline{abcd}$. В какой-то момент у Димы в тетради была сделана запись как на картинке (разными буквами обозначены разные цифры, а делители за чертой справа написаны необязательно в порядке убывания). По этой записи восстановите число $\overline{abcd}$.

$$\begin{array}{r|l} \overline{abcd} & e \\ \overline{fcga} & n \\ \overline{abc} & c \\ 231 & \end{array}$$

Ответ: 6930.

Решение. Заметим, что после деления числа $\overline{abcd}$ на e и n получилось число $\overline{abc}$. Это значит, что $d = 0$ и $e \cdot n = 10$, то есть либо $e = 5$ и $n = 2$, либо $e = 2$ и $n = 5$.

Заметим, что если $c \geqslant 5$, то при умножении на него числа 231 не может получиться трёхзначного числа $\overline{abc}$. Тогда $c = 3$, так как по условию $c \neq e$ и $c \neq n$, то есть $c \neq 2$. Тогда $\overline{abc} = 231 \cdot 3 = 693$, откуда $n = 2$, $\overline{fcga} = 1386$, $e = 5$, а $\overline{abcd} = 6930$. □

Задача 2.2. Учительница дала Диме задание найти простые делители четырёхзначного числа $\overline{abcd}$. В какой-то момент у Димы в тетради была сделана запись как на картинке (разными буквами обозначены разные цифры, а делители за чертой справа написаны необязательно в порядке убывания). По этой записи восстановите число $\overline{abcd}$.

$$\begin{array}{r|l} \overline{abcd} & e \\ \overline{fanb} & n \\ \overline{abc} & c \\ 321 & \end{array}$$

Ответ: 9630.

Задача 3.1. Машины А и Б одновременно выехали из одного города в одну сторону по дороге, а машина В выехала из того же города, но позже на полчаса. Машина В догнала машину А через 4 часа после своего выезда. При этом через 6 часов после выезда машины В расстояние между В и Б только увеличилось в 4 раза по сравнению с моментом выезда В. Во сколько раз скорость машины Б больше скорости машины А (все машины ехали с фиксированными скоростями)?

Ответ: 1,5.

Решение. Пусть скорость машины В равна x км/ч. Машина В проехала за 4 часа такое же расстояние, как машина А за 4,5 часа, то есть скорость машины А равна $\frac{4x}{4{,}5} = \frac{8x}{9}$ км/ч. Если машина Б за полчаса проезжает s км, то за 6 часов она проезжает $12s$ км, за это же время машина В проехала $9s$ км, то есть скорость машины Б равна $\frac{12x}{9} = \frac{4x}{3}$. Таким образом, скорость машины Б больше скорости машины А в $\frac{4x}{3} : \frac{8x}{9} = \frac{36}{24} = 1{,}5$ раза. □

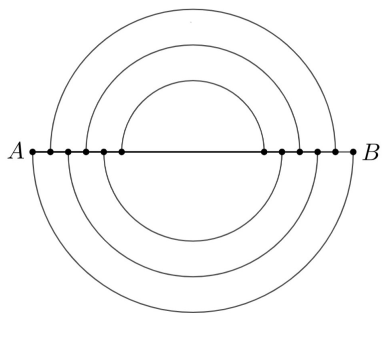
Задача 3.2. Машины А и Б одновременно выехали из одного города в одну сторону по дороге, а машина В выехала из того же города, но позже на полчаса. Машина В догнала машину А через 3 часа после своего выезда. При этом через 9 часов после выезда машины В расстояние между В и Б только увеличилось в 9 раз по сравнению с моментом выезда В. Во сколько раз скорость машины Б больше скорости машины А (все машины ехали с фиксированными скоростями)?

Ответ: 2,1.

Задача 3.3. Машины А и Б одновременно выехали из одного города в одну сторону по дороге, а машина В выехала из того же города, но позже на полчаса. Машина В догнала машину А через 5 часов после своего выезда. При этом через 7 часов после выезда машины В расстояние между В и Б только увеличилось в 4 раза по сравнению с моментом выезда В. Во сколько раз скорость машины Б больше скорости машины А (все машины ехали с фиксированными скоростями)?

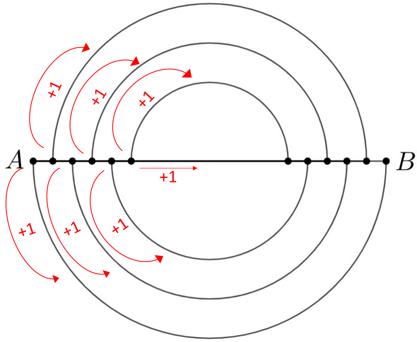
Ответ: 1,4.

Задача 4.1. Сколько существует различных несамопересекающихся путей из точки A в точку B?



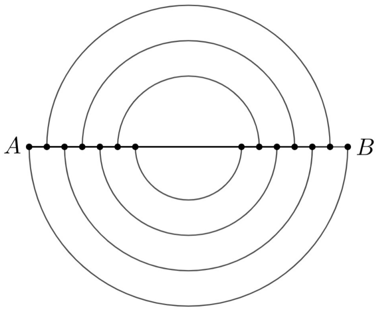
Ответ: 7.

Решение. Заметим, что на каждом из перекрёстков, находящихся ближе к точке A, есть два варианта направления движения: двигаться вдоль отрезка AB или повернуть на полуокружность, а на каждом из перекрёстков, находящихся ближе к точке B, есть только один вариант направления движения: вдоль отрезка AB, иначе не будет выполняться условие отсутствия самопересечения. Также заметим, что, свернув на полуокружность, мы сразу попадаем на перекрёстки, находящиеся ближе к точке B. То есть поворот на полуокружность добавляет только один способ добраться от точки A в точку B. Также есть 1 вариант пути без поворотов на полуокружности. Так как на рисунке полуокружностей 6, то всего $6 + 1 = 7$ способов добраться от точки A в точку B.



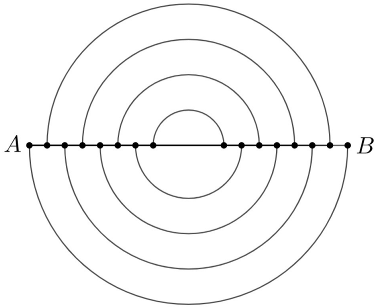
□

Задача 4.2. Сколько существует различных несамопересекающихся путей из точки A в точку B?



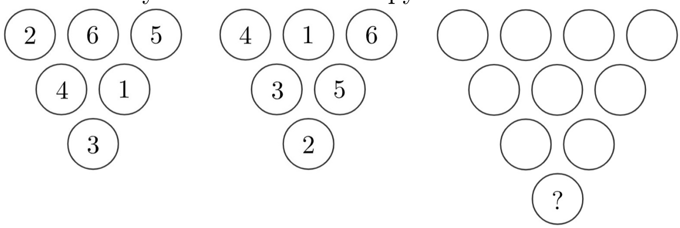
Ответ: 8.

Задача 4.3. Сколько существует различных несамопересекающихся путей из точки A в точку B?



Ответ: 9.

Задача 5. На рисунке показаны примеры того, как можно расставить числа от 1 до 6 в треугольник так, что каждое из чисел написано ровно один раз, а разность любых двух чисел по горизонтали находится точно под ними. Вася аналогичным образом решил расставлять числа от 1 до 10. Какое наибольшее число у него могло получиться в нижнем кружочке?



Ответ: 4.

Решение. Заметим, что число 10 может стоять только в верхней строке, так как его нельзя получить в виде разности никакой из пар среди чисел от 1 до 9. Отсюда следует, что ни 10, ни 9, ни 8 не могут стоять в нижнем кружочке. Также отметим, что число 9 не может стоять ниже второй сверху строки, так как его можно получить только разностью 10 и 1.

Проверим, что числа 7, 6 и 5 также не могли стоять в нижнем кружочке:

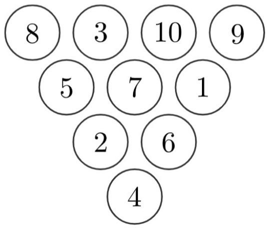
1) Пусть в нижнем кружочке написано число 7. Его можно получить несколькими способами: $7 = 10 - 3 = 9 - 2 = 8 - 1$. Так как на второй снизу строке не может стоять ни 10, ни 9, то остаётся рассмотреть вариант, когда в предпоследней строке стоят 8 и 1. Число 8 может быть получено как $8 = 10 - 2 = 9 - 1$. Число 10 на вторую строку поставить не можем. Оставшийся вариант также не подходит, так как число 1 не может быть написано повторно.

2) Пусть в нижнем кружочке стоит число 6. Без использования чисел 10 и 9 его можно получить как $6 = 8 - 2 = 7 - 1$. Рассмотрим первый из этих вариантов, с числом 8. Над числом 8 в этом случае не могут находиться 10 и 2. Тогда над

ним написаны 9 и 1. Но над 9 не может быть написано 10 и 1, так как число 1 не может повторяться. Отметим, что отсюда следует, что число 8 не может стоять в предпоследней строке.

3) Пусть в нижнем кружочке написано число 5. Без использования чисел 8, 9 и 10 его можно получить как $5 = 7 - 2 = 6 - 1$. Рассмотрим вариант с числом 7. Во избежание повторов над числом 7 в этом случае не могут находиться 9 и 2. Тогда над ним написаны числа 8 и 1. Но тогда над числом 8 не могут находиться ни 10 и 2, ни 9 и 1, так как числа 1 и 2 уже использованы и повторяться не могут. Осталось рассмотреть случай, когда над 5 написаны 6 и 1. Число 6 можно получить как $6 = 10 - 4 = 9 - 3 = 8 - 2 = 7 - 1$. Пара 10 и 4 быть написана не может, так как число 10 не можем поставить в эту строку. Ни 7 и 1, ни 9 и 3, ни 8 и 2 также написаны быть не могут, так как числа не могут повторяться.

Приведём пример, когда в нижнем кружочке написано число 4:



$\square$

Задача 6.1. Гриша и Паша играют в игру. Гриша загадывает натуральное число от 1 до 15. Своим ходом Паша называет любое число. Если оно совпадает с числом Гриши, то Паша победил. Если же нет, то Гриша прибавляет к своему числу 333. За какое наименьшее число вопросов Паша может гарантированно победить?

Ответ: 15.

Решение. Покажем, что Паша может победить за 15 вопросов: сначала он спрашивает 1, потом $2{+}333$, потом $3 + 2 \cdot 333$, ..., $15 + 14 \cdot 333$.

Докажем, что за меньшее количество вопросов справиться нельзя. Напишем все числа от 1 до 15, а после каждого вопроса будем одновременно ко всем числам прибавлять 333. Если Паша будем называть одно из написанных чисел, то вычёркиваем его из списка (за каждый ход вычёркивается не больше одного числа). Если количество вопросов будет меньше 15, то хотя бы одно из чисел останется не зачёркнутым, а значит существует изначальный вариант, при котором Паша не победит. $\square$

Задача 6.2. Гриша и Паша играют в игру. Гриша загадывает натуральное число от 1 до 23. Своим ходом Паша называет любое число. Если оно совпадает с числом Гриши, то Паша победил. Если же нет, то Гриша прибавляет к своему числу 137. За какое наименьшее число вопросов Паша может гарантированно победить?

Ответ: 23.

Задача 6.3. Гриша и Паша играют в игру. Гриша загадывает натуральное число от 1 до 17. Своим ходом Паша называет любое число. Если оно совпадает с числом Гриши, то Паша победил. Если же нет, то Гриша прибавляет к своему числу 176. За какое наименьшее число вопросов Паша может гарантированно победить?

Ответ: 17.