8-9 классы.

Задача 1.1.
Точки А и Б являются противоположными вершинами прямоугольника 3×4 на бесконечной клетчатой плоскости, где длина стороны клеток равна 1. Улитка ползёт по линиям сетки из точки А в точку Б, при этом поворачивать она может только в узлах сетки. Сколько существует способов построить маршрут улитки длины 9?

Ответ: 1134.

Решение. Будем считать, что улитка находится в точке (0,0) и ей нужно проползти в точку (4,3). Есть две группы способов движения улитки таких, чтобы длина её маршрута из точки А в точку Б оказалась длины 9:

1) Весь маршрут состоит из четырёх отрезков вправо, четырёх вверх и одного вниз в любом порядке. Количество таких способов равно $C_9^4 \cdot C_5^1 = 630$;

2) Весь маршрут состоит из пяти отрезков вправо, одного влево и трёх вверх в любом порядке. Количество таких способов равно $C_9^5 \cdot C_4^1 = 504$.

Складывая данные числа, получаем 1134 способа. □

Задача 1.2.
Точки А и Б являются противоположными вершинами прямоугольника 2×5 на бесконечной клетчатой плоскости, где длина стороны клеток равна 1. Улитка ползёт по линиям сетки из точки А в точку Б, при этом поворачивать она может только в узлах сетки. Сколько существует способов построить маршрут улитки длины 9?

Ответ: 756.

Задача 1.3.
Точки А и Б являются противоположными вершинами прямоугольника 4×5 на бесконечной клетчатой плоскости, где длина стороны клеток равна 1. Улитка ползёт по линиям сетки из точки А в точку Б, при этом поворачивать она может только в узлах сетки. Сколько существует способов построить маршрут улитки длины 11?

Ответ: 5082.

Задача 2.1.
Учительница написала на доске число. Вася разделил его на 15, а Петя – на 35. Аня заметила, что у Васи получился куб некоторого натурального числа, а у Пети – пятая степень некоторого натурального числа. Напишите наименьшее такое число, куб которого мог получиться у Васи.

Ответ: 1323.

Решение. Пусть учительница написала на доске число A. Тогда пусть у Васи получилось число $A : 15 = a^3$, а у Пети – $A : 35 = b^5$, где a, b – натуральные числа. Откуда, выражая число A, получаем равенство: $a^3 \cdot 3 \cdot 5 = b^5 \cdot 5 \cdot 7$, то есть $a^3 \cdot 3 = b^5 \cdot 7$.

Так как числа 3 и 7 взаимно простые и a, b – натуральные, то, чтобы равенство выполнялось, a и b имеют вид: $a = 7x$ и $b = 3y$, где x, y – натуральные числа. Преобразуем полученное выражение: $3 \cdot 7^3 \cdot x^3 = 7 \cdot 3^5 \cdot y^5$, то есть $7^2 \cdot x^3 = 3^4 \cdot y^5$.

Откуда получим, что x, y имеют вид: $x = 7 \cdot 3^3 \cdot l$ и $y = 7 \cdot 3 \cdot k$, где k, l – натуральные числа, а тогда $a = 7 \cdot x = 7^2 \cdot 3^3 \cdot l$. Тогда полученное выше равенство преобразуется в $7^5 \cdot 3^9 \cdot l^3 = 3^9 \cdot 7^5 \cdot k^5$, то есть $l^3 = k^5$.

Так как a должно быть наименьшим, то $l = k = 1$, $a = 7^2 \cdot 3^3 = 1323$. $\square$

Задача 2.2.
Учительница написала на доске число. Вася разделил его на 21, а Петя – на 15. Аня заметила, что у Васи получился куб некоторого натурального числа, а у Пети – пятая степень некоторого натурального числа. Напишите наименьшее такое число, куб которого мог получиться у Васи.

Ответ: 8575.

Задача 2.3.
Учительница написала на доске число. Вася разделил его на 15, а Петя – на 21. Аня заметила, что у Васи получился куб некоторого натурального числа, а у Пети – пятая степень некоторого натурального числа. Напишите наименьшее такое число, куб которого мог получиться у Васи.

Ответ: 6125.

Задача 3.1.
В треугольнике ABC с целочисленными сторонами $AC = 2024$. Биссектриса $\angle BAC$ пересекает сторону BC в точке D. Оказалось, что $AB = CD$. Найдите длину стороны BC.

Ответ: 1518.

Решение. Введём обозначения: пусть $AB = CD = x$ и $BD = y$. Тогда по свойству биссектрисы: $\frac{x}{y} = \frac{2024}{x}$, то есть $x^2 = 2024y = 2^3 \cdot 11 \cdot 23y$.

Так как по условию длины сторон треугольника – целые числа, то $AB = x$ – целое и $BC = x + y$ – целое, откуда y – тоже целое. Получаем, что число $2^3 \cdot 11 \cdot 23y$ является квадратом некоторого целого числа. Тогда $y = 2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot z^2 = 506z^2$, где z – целое число. Откуда получаем, что $AB = x = 1012z$, $BC = x + y = 1012z + 506z^2$, $AC = 2024$.

Заметим, что при $z \geqslant 2$ не выполняется неравенство треугольника, то есть что $1012z + 2024 > 1012z + 506z^2$.

Таким образом, $z = 1$, а тогда $BC = 1012z + 506z^2 = 1518$. $\square$

Задача 3.2.
В треугольнике ABC с целочисленными сторонами $AC = 2584$. Биссектриса $\angle BAC$ пересекает сторону BC в точке D. Оказалось, что $AB = CD$. Найдите длину стороны BC.

Ответ: 1938.

Задача 4.1.
Заяц поставил фишку на какую-то клетку доски 11×11. За один ход Заяц передвигает фишку на соседнюю по стороне клетку, но при этом нельзя делать два одинаковых хода подряд (например, нельзя двигать вправо 2 раза подряд). Какое наибольшее количество клеток Заяц может посетить такими ходами, если нельзя наступать на одну клетку дважды?

Ответ: 103.

Решение. Докажем, что Заяц не сможет посетить больше 103 клеток. Раскрасим клетки в шахматную раскраску так, чтобы угловые клетки были чёрными. Чёрные клетки таблицы разделим на два типа: те, которые находятся в строчках с нечётным номером, и те, которые находятся в строчках с чётным номером. Заметим, что фишка чередует на своем пути чёрные и белые клетки, а также типы чёрных клеток чередуются между собой. Количество чёрных клеток второго типа равняется 25, а значит всего чёрных клеток на пути будет не больше 51, тогда белых клеток — не больше 52.

На рисунке ниже приведён пример, в котором Заяц посетил ровно 103 клетки.

2	3	6	7	10	11	14	15	18	19	
1	4	5	8	9	12	13	16	17	20	21
	39	38	35	34	31	30	27	26	23	22
41	40	37	36	33	32	29	28	25	24	
42	43	46	47	50	51	54	55	58	59	
	44	45	48	49	52	53	56	57	60	61
	79	78	75	74	71	70	67	66	63	62
81	80	77	76	73	72	69	68	65	64	
82	83	86	87	90	91	94	95	98	99	
	84	85	88	89	92	93	96	97	100	101
									103	102

$\square$

Задача 4.2.
Заяц поставил фишку на какую-то клетку доски 13×13. За один ход Заяц передвигает фишку на соседнюю по стороне клетку, но при этом нельзя делать два одинаковых хода подряд (например, нельзя двигать вправо 2 раза подряд). Какое наибольшее количество клеток Заяц может посетить такими ходами, если нельзя наступать на одну клетку дважды?

Ответ: 147.

Задача 4.3.
Заяц поставил фишку на какую-то клетку доски 9×9. За один ход Заяц передвигает фишку на соседнюю по стороне клетку, но при этом нельзя делать два одинаковых хода подряд (например, нельзя двигать вправо 2 раза подряд). Какое наибольшее количество клеток Заяц может посетить такими ходами, если нельзя наступать на одну клетку дважды?

Ответ: 67.

Задача 5.1.
В треугольнике ABC: $AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$. Пусть точки D, E и F – середины сторон AB, BC и CA соответственно. Точка $X \neq E$ – пересечение окружностей, описанных вокруг $\triangle BDE$ и $\triangle CEF$. Чему равна сумма $XA + XB + XC$?

Ответ: 24,375.

Решение. Заметим, что точка O — центр описанной около $\triangle ABC$ окружности, лежит на окружности, проходящей через точки B, D, E, так как $\angle ODB + \angle OEB = 180°$. Аналогично, точка O лежит на окружности, проходящей через точки C, E, F. Значит, точки X и O совпадают и искомая сумма равна $3R$, где R – радиус описанной около $\triangle ABC$ окружности.

Используя формулу Герона и формулу площади треугольника через радиус описанной окружности, получим равенство:

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R},$$

откуда

$$3R = \frac{3abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

Подставляя соответствующие значения сторон и полупериметра, получим, что $3R = 24{,}375$. $\square$

Задача 5.2.
В треугольнике ABC: $AB = 9$, $BC = 10$, $AC = 17$. Пусть точки D, E и F – середины сторон AB, BC и CA соответственно. Точка $X \neq E$ – пересечение окружностей, описанных вокруг $\triangle BDE$ и $\triangle CEF$. Чему равна сумма $XA + XB + XC$?

Ответ: 31,875.

Задача 5.3.
В треугольнике ABC: $AB = 11$, $BC = 13$, $AC = 20$. Пусть точки D, E и F – середины сторон AB, BC и CA соответственно. Точка $X \neq E$ – пересечение окружностей, описанных вокруг $\triangle BDE$ и $\triangle CEF$. Чему равна сумма $XA + XB + XC$?

Ответ: 32,5

Задача 6.1.
200 учеников писали тест из 11 задач. Каждая задача была верно решена хотя бы 91 участником. При каком наибольшем k можно гарантировать, что найдётся ученик, который верно решил хотя бы k задач?

Ответ: 6.

Решение. Заметим, что всего правильных решений было хотя бы $91 \cdot 11 = 1001$, а значит по принципу Дирихле найдётся ученик, который решил хотя бы $\frac{1001}{200} > 5$ задач, то есть хотя бы 6. При этом существует пример, в котором все ученики решили не больше 6 задач: 100 учеников решили задачи с номерами 1-6, а другие 100 учеников решили задачи с номерами 7-11. $\square$

Задача 6.2.
200 учеников писали тест из 9 задач. Каждая задача была верно решена хотя бы 89 участниками. При каком наибольшем k можно гарантировать, что найдётся ученик, который верно решил хотя бы k задач?

Ответ: 5.

Задача 6.3.
140 учеников писали тест из 13 задач. Каждая задача была верно решена хотя бы 97 участниками. При каком наибольшем k можно гарантировать, что найдётся ученик, который верно решил хотя бы k задач?

Ответ: 10.