Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2025

Заключительный этап 24 марта

10 класс

Задача 10.1. Пусть $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$. Рассматриваются два множества $A = \{p(2), p(3), \ldots, p(2024)\}$ и $B = \{p(2) - 1, p(3) - 1, \ldots, p(2024) - 1\}$. В каком из этих множеств квадратов целых чисел больше?

Ответ: Во втором множестве квадратов на 1 больше.

Решение. Заметим, что $p(x) = (x-1)^2(2x+1)$, а $p(x) - 1 = x^2(2x-3)$. Таким образом, при целом x число $p(x)$ является квадратом целого тогда и только тогда, когда квадратом целого является число $2x+1$, а число $p(x) - 1$ — тогда и только тогда, когда квадратом целого является число $2x - 3$. Первых столько же, сколько нечетных квадратов на отрезке натурального ряда от 5 до 4049, вторых столько же, сколько нечетных квадратов на отрезке натурального ряда от 1 до 4048. Поскольку нечетных квадратов на втором отрезке на 1 больше (из-за 1), то во втором множеств квадратов на 1 больше.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 5 б. Ответ неверен из-за того, что не учтено число 1 во множестве B.
- 2 б. Приведено верное представление p(x) элементов через произведение для элементов обоих множеств.
- 1 б. Приведено верное представление p(x) элементов через произведение для элементов одного из множеств A или B.
- 1 б. Доказано, что число $p(x)$ является квадратом целого тогда и только тогда, когда квадратом целого является число $2x+1$, а число $p(x) - 1$ — тогда и только тогда, когда квадратом целого является число $2x - 3$.

Задача 10.2. Имеется таблица 4×4, в каждой клетке которой стоит 0 или 1. Каждую минуту с ней проделывается следующая операция: для каждой клетки считается сумма чисел в соседних с ней по сторонам клетках и одновременно в каждой клетке число заменяется на 0, если соответствующая сумма четна, и на 1 — если нет. Докажите, что в течение 6 минут какая-нибудь расстановка повторится дважды.

Решение. Рассмотрим сначала таблицы, в которых стоит только одна единица (назовем такие таблицы *базисными*). Докажем, что для таких таблиц условие задачи выполнено. Это легко сделать прямым перебором. В силу симметрии конструкции этот перебор достаточно провести для таблиц, у которых единица стоит в верхнем левом квадрате 2×2 (даже в верхнем уголке этого квадрата; остальные таблицы получаются из этих подходящим отражением).

1	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

→

0	1	0	0
1	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

→

0	0	1	0
0	0	0	0
1	0	0	0
0	0	0	0

→

0	1	0	1
1	0	1	0
0	1	0	0
1	0	0	0

→

0	0	1	0
0	0	0	0
1	0	0	0
0	0	0	0

0	1	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

→

1	0	1	0
0	1	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

→

0	1	0	1
0	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

→

1	0	0	0
0	0	0	1
1	0	1	0
0	1	0	0

→

0	1	0	1
0	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

0	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

→

0	1	0	0
1	0	1	0
0	1	0	0
0	0	0	0

→

0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	0	0
0	1	0	0

→

0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	1	0

→

0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	0	0
0	1	0	0

Видно, что для всех базисных таблиц третья позиция совпадает с пятой.

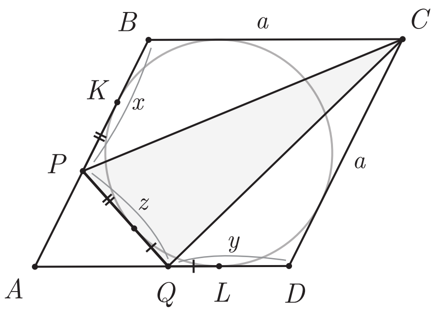
Теперь докажем утверждение для произвольной таблицы. Будем называть *суммой* таблиц таблицу, которая получается сложением чисел по модулю 2 на одинаковых позициях в двух данных таблицах. Заметим, что любая таблица может быть представлена в виде суммы некоторого количества базисных таблиц (мы как будто выбираем базис на множестве таблиц). Кроме того, ясно, что применение операции к исходной таблице дает в точности применение операции к каждой из базисных таблиц, из которых складывается таблица исходная. Поскольку для базисных таблиц третья позиция совпадает с пятой, аналогичное утверждение будет верно и для таблицы исходной, что и требовалось доказать.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 5 б. Решение в целом верное, но в доказательстве сведения задачи к набору конкретных таблиц присутствуют неточности.
- 1 б. Верно рассмотрен какой-то частный случай таблицы, других продвижений нет.

Задача 10.3. Дан ромб $ABCD$, в который вписана окружность. Точки P и Q выбраны на сторонах AB и AD таким образом, что отрезок PQ касается окружности.
а) Докажите, что площадь треугольника CPQ не зависит от выбора отрезка PQ.
б) Найдите эту площадь, если известна сторона a ромба и его острый угол α.



Решение. а) Обозначим через r радиус окружности, а через K и L — точки касания окружности со сторонами AB и AD. Заметим, что

$$S(CPQ) = S(CBPQD) - S(CBP) - S(CDQ) =$$
$$= \frac{2a + x + y + z}{2} \cdot r - (x + y)r = \left(a - \frac{x + y - z}{2}\right) \cdot r.$$

Заметим, что $\dfrac{x+y-z}{2} = BK$ — не зависит от выбора точек P и Q.

б) В силу п. а) имеем

$$S(CPQ) = S(CKA) = r \cdot AK.$$

Заметим, что $r = (a/2)\sin\alpha$ и $AK = r \cdot \operatorname{ctg}(\alpha/2)$, откуда $S(CPQ) = \dfrac{a^2}{4}\sin^2\alpha \operatorname{ctg}(\alpha/2)$.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 5 б. Доказано, что площадь треугольника CPQ не зависит от выбора отрезка PQ.
- 2 б. Найдена площадь треугольника CPQ.
- 1 б. Используется факт равенства отрезков, исходящих из одной вершины и касающихся окружности.

Задача 10.4. Найдите все натуральные числа, представимые в виде $[a, b] + [b, c] + [c, a]$ для некоторых натуральных a, b и c (здесь $[x, y]$ — наименьшее общее кратное чисел x и y).

Ответ: Все натуральные числа, кроме 2^t, где t — целое неотрицательное число.

Решение. Сначала заметим, что число 1 не может быть представлено в таком виде. Докажем, что представляются все нечетные числа. В самом деле, $[1, 1] + [k, 1] + [1, k] = 2k + 1$ при всех натуральных k. Далее, заметим, что представляются все числа, имеющие нечетный делитель, больший 1. Действительно, $[2^s, 2^s] + [2^s k, 2^s] + [2^s, 2^s k] = 2^s(2k + 1)$ для всех натуральных k и целых неотрицательных s.

Докажем, что степени двойки не представляются в таком виде. Предположим противное: пусть число 2^t представимо. Выберем наименьшее такое t. Без ограничения общности можно считать, что среди чисел a, b и c есть нечетные: в противном случае мы можем сократить все числа на наименьшую степень вхождения двойки и уменьшить число t. Тогда среди чисел a, b и c должно быть ровно одно нечетное число и два четных.

Без ограничения общности число c нечетно, $a = 2^\alpha a_1$ и $b = 2^\beta b_1$, где a_1 и b_1 нечетны. Если $\alpha > \beta$ (случай $\alpha < \beta$ аналогичен), то степени вхождения двойки в числа $[a, b]$, $[b, c]$ и $[c, a]$ равны α, β и α соответственно. Но тогда в сумму двойка входит в степени β, а потому эта сумма не может равняться степени двойки.

Значит, $\alpha = \beta$. Но тогда равенство $[2^\alpha a_1, 2^\alpha b_1] + [2^\alpha b_1, c] + [c, 2^\alpha a_1] = 2^t$ после сокращения на 2^α превращается в равенство $[a_1, b_1] + [b_1, c] + [c, a_1] = 2^{t-\alpha}$. Мы уменьшили представимую степень двойки и таким образом получили противоречие.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 6 б. В ответе пропущено число 1.
- 4 б. Доказано, что степени двойки не подходят, других продвижений нет.
- 3 б. Доказано, что любое число, кроме степени двойки, подходит, других продвижений нет.
- 2 б. Доказано, что любое нечетное число подходит, других продвижений нет.

Задача 10.5. Найдите количество перестановок $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$ набора чисел $(1, 2, \ldots, 10)$, таких, что $a_1 \leqslant 2a_2 \leqslant \ldots \leqslant 10a_{10}$.

Ответ: 89.

Решение. Докажем общее утверждение: количество перестановок a_1, a_2, $\ldots$, a_n чисел 1, 2, $\ldots$, n, таких, что $a_1 \leqslant 2a_2 \leqslant \ldots \leqslant na_n$ равно F_{n+1}, где F_n — n-е число Фибоначчи ($F_1 = F_2 = 1$, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$). В частности, отсюда будет следовать, что ответом в задаче является число $F_{11} = 89$.

Обозначим через P_n количество искомых перестановок длины n. Легко видеть, что $P_1 = 1$, $P_2 = 2$. Докажем, что $P_{n+1} = P_n + P_{n-1}$ при $n \geqslant 2$. Для этого поймем, на какой позиции может стоять в нашей перестановке число n.

Пусть k — такой индекс, что $a_k = n$. При $k = n$ мы получаем $a_n = n$, и количество таких перестановок равно P_{n-1}. При $k = n - 1$ имеем $na_n \geqslant$

$n(n-1)$, откуда $a_n \geqslant n-1$. Но $a_n \neq n$, поэтому $a_n = n-1$, и количество таких перестановок равно P_{n-2}.

Предположим, что существует такая перестановка, что $a_k = n$ при $k \leqslant n-2$. Для каждого $i \in (k, n)$ имеем $kn = ka_k \leqslant ia_i < na_i$, поэтому $a_i \geqslant k+1$. Кроме того, $na_n \geqslant (n-1)a_{n-1} \geqslant (n-1)(k+1)$, откуда $a_n \geqslant k+1$. Получается, что все числа a_k, a_{k+1}, $\ldots$, a_n лежат на отрезке $[k+1; n]$. Но на этом отрезке только $n-k$ чисел — противоречие.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 3 б. Доказано, что либо $a_n = n$, либо $a_{n-1} = n$ и $a_n = n-1$, других продвижений нет.
- 2 б. Доказано, что либо $a_n = n$, либо $a_{n-1} = n$, других продвижений нет.
- 2 б. С помощью недоказанного предположения о числах Фибоначчи получен верный ответ, других продвижений нет.
- 1 б. Присутствует идея о том, что количество перестановок — это число Фибоначчи, но других продвижений нет.