

Задача 11.1. Дан прямоугольный треугольник с натуральными длинами сторон. Пусть α — острый угол, а угол β таков, что $\operatorname{tg} 2\beta = \operatorname{tg} 3\alpha$. Докажите, что величина $\operatorname{tg} \beta$ рациональна.

Решение. По формулам двойного и тройного аргументов получаем следующие формулы:

$$\frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta} = \operatorname{tg} 2\beta = \operatorname{tg} 3\alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha (3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{p(3q^2 - p^2)}{q(q^2 - 3p^2)} := \frac{1}{n}.$$

Значит, $\operatorname{tg}^2 \beta + 2n \operatorname{tg} \beta - 1 = 0$. Это уравнение имеет рациональные корни тогда и только тогда, когда дискриминант этого квадратного уравнения должен быть точным квадратом. Вычисляя дискриминант, находим

$$D/4 = n^2 + 1 = \left(\frac{p(3q^2 - p^2)}{q(q^2 - 3p^2)} \right)^2 + 1 = \frac{(p^2 + q^2)^3}{p^2(3q^2 - p^2)^2}.$$

Видно, что это число является квадратом рационального числа тогда и только тогда, когда квадратом натурального числа является выражение $p^2 + q^2$.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 5 б. При вычислении дискриминанта квадратного уравнения на $\operatorname{tg} \beta$ допущена арифметическая ошибка, но числитель дискриминанта посчитан верно, и задача с учетом этого числителя решена правильно.
- 1 б. Задача сведена к исследованию квадратного уравнения на $\operatorname{tg} \beta$, но дальнейшие продвижения отсутствуют.

Задача 11.2. В некоторой школе все ребята увлекаются геометрией и состоят в различных геометрических клубах. Известно, что у любых двух клубов есть хотя бы один общий член. Докажите, что можно раздать школьникам циркули и линейки таким образом, чтобы у одного человека были и циркуль, и линейка,

у каждого из остальных были или циркуль, или линейка (но не оба инструмента сразу), и в каждом клубе у его членов нашлись бы и циркуль, и линейка.

Решение. Рассмотрим самый маленький по численности участников клуб A (если таких несколько, выберем любой). Одному его участнику (назовем его Паша) выдадим и циркуль, и линейку, остальным участникам этого клуба дадим только циркуль, а всем остальным ребятам — только линейку. Докажем, что условие задачи будет выполняться.

Действительно, рассмотрим произвольный клуб X . Если в нем есть Паша, то условие сразу выполнено. В противном случае клуб X пересекается с клубом A по некоторым людям, причем это пересечение собственное, т.е. члены одного из клубов не могут все принадлежать и другому клубу. Действительно, A не содержится в X , потому что Паша есть в A , но не в X , а X не содержится в A , поскольку A — самый маленький клуб. Таким образом, в X есть люди из A с циркулем и люди из A с линейкой, что и требовалось.

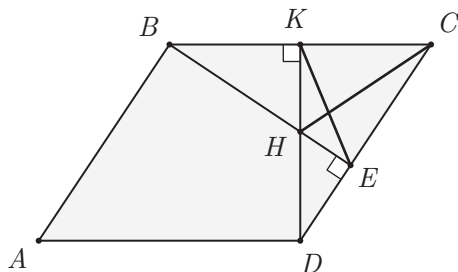
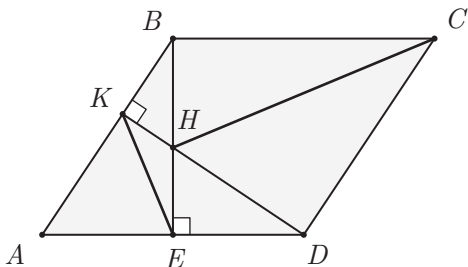
Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 3 б. В решении не используется минимальность множества A , но остальные соображения верные.

Задача 11.3. Высоты BE и DK параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке H .

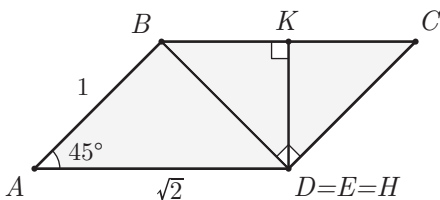
- Докажите, что прямые CH и KE перпендикулярны;
- Найдите длину диагонали BD , если $KE = 3$, $CH = 3,2$.



Ответ: а) неверно в общем случае.

б) $\frac{48}{\sqrt{31}}$.

Решение. а) Докажем, что в общем случае это неверно. В условии не указаны стороны, на которые опускаются высоты BE и DK , а значит, возможны два варианта: либо точки E и K лежат соответственно на сторонах AD и AB , либо соответственно на сторонах CD и CB . Приведём пример параллелограмма для второго случая, в котором утверждение задачи неверно — пусть $\angle A = 45^\circ$, $AB = 1$, $AD = \sqrt{2}$. Тогда вершина D совпадает с точками E и H , а точка K является серединой BC . Очевидно, что тогда угол между CH и KE равен 45° и они не перпендикулярны.

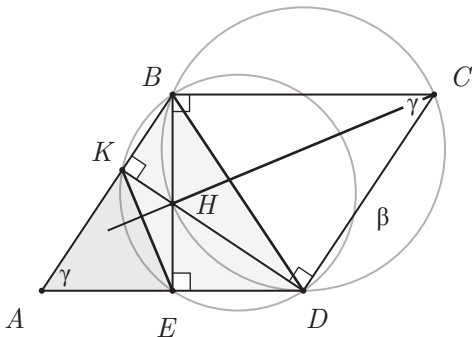


Замечание В случае, когда высоты BE и DK опущены на стороны AD и AB , действительно, всегда будет перпендикулярность между прямыми KE и CH .

б) **Случай 1.** Рассмотрим случай, когда высоты BE и DK опущены на стороны AD и AB .

Пусть $\angle BAD = \angle BCD = \gamma$. Треугольники AKE и ABD подобны (их углы равны), следовательно, $\frac{KE}{BD} = \frac{AE}{AB} = \cos \gamma$.

Для треугольника BCD , вписанного в окружность с диаметром CH верна теорема синусов $\frac{BD}{\sin \gamma} = CH$.



Подставляя известные значения KE и CH получаем:

$$\begin{cases} \sin \gamma = \frac{BD}{3,2}, \\ \cos \gamma = \frac{3}{BD}. \end{cases}$$

Заменяя $BD = x$ и подставляя все в выражение тригонометрического тождества получаем уравнение:

$$\frac{x^2}{3,2^2} + \frac{3^2}{x^2} = 1$$

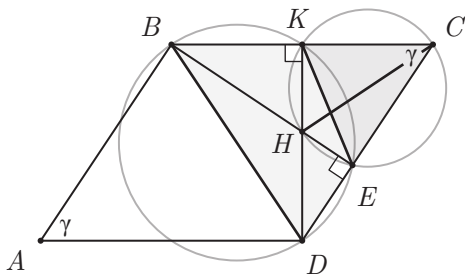
$$x^4 - 10,24x^2 + 92,16 = 0$$

Полученное квадратное уравнение на x^2 не имеет решений, так как его дискриминант меньше нуля. Значит, этот случай невозможен.

Случай 2. Рассмотрим случай, когда высоты BE и DK опущены на стороны CD и CB .

Для треугольника CKE , вписанного в окружность с диаметром CH верна теорема синусов $\frac{KE}{\sin \gamma} = CH$. Таким образом, $\sin \gamma = \frac{KE}{CH} = \frac{15}{16}$.

Пусть $\angle BCD = \gamma$. Треугольники CKE и CDB подобны (их углы равны), следовательно, $\frac{KE}{BD} = \frac{CE}{BE} = \cos \gamma = \sqrt{1 - \sin^2 \gamma} = \frac{\sqrt{31}}{16}$. Подставляя $KE = 3$ находим $BD = \frac{48}{\sqrt{31}}$.



Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 3 б. Доказано, что утверждение, что прямые CH и KE перпендикулярны, неверно в общем случае.

Задача 11.4. Пусть $a_n = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + \dots + [\sqrt{n}]$. Докажите, что среди элементов последовательности a_1, a_2, \dots есть лишь конечное количество простых чисел, и найдите наибольшее из них.

Решение. Пусть $k^2 \leq n < (k+1)^2$. Тогда $[\sqrt{n}] = k$. Значит, $[\sqrt{n}]$ принимает фиксированное значение, равное k , пока n пробегает отрезок $[k^2, (k+1)^2 - 1]$, длина которого равна $2k+1$. Значит, если $n = k^2 + t$, где $0 \leq t \leq 2k$, то

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{i=1}^{k-1} i(2i+1) + k(t+1) = 2 \sum_{i=1}^{k-1} i^2 + \sum_{i=1}^{k-1} i + k(t+1) = \\ &= \frac{(k-1)k(2k-1)}{3} + \frac{(k-1)k}{2} + k(t+1) = \frac{(k-1)k(4k+1)}{6} + k(t+1). \end{aligned}$$

Заметим, что дробь $\frac{(k-1)k(4k+1)}{6}$ принимает целые значения при натуральных k . Если множитель k в числителе этой дроби не сокращается полностью со знаменателем, то данная дробь не взаимно проста с числом $k(t+1)$ (у них обоих есть общий делитель, входящий в k и не сократившийся после деления на 6). Ясно, что при $k > 6$ такой множитель заведомо останется. Поэтому $k \leq 6$ и $n \leq 7^2 - 1 = 48$. Значит, при $n \geq 49$ все числа a_n составные.

При $k = 6$ получаем формулу $a_n = 125 + 6(t+1)$, где $t \leq 12$. При $t = 12$ находим $a_{48} = 203 = 7 \cdot 29$, а при $t = 11$ получаем $a_{47} = 197$ — простое. Таким образом, наибольшее простое число в последовательности a_n равно 197 и соответствует индексу $n = 47$.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 6 б. При в целом верном решении допущена вычислительная ошибка при проверке $k = 6$.
- 3 б. Сумма приведена к виду $\frac{(k-1)k(4k+1)}{6} + k(t+1)$, но дальнейшие рассуждения неверные или отсутствуют.
- 1 б. Задача сведена к исследованию суммы вида $\sum_{i=1}^{k-1} i(2i+1) + k(t+1)$, не содержащей целых частей и квадратных корней, но другие продвижения отсутствуют.

Задача 11.5. Дана клетчатая доска 6×6 . Фигура *принц* умеет ходить по горизонтали и вертикали, делая ходы сначала на 1 клетку, потом — на две (в одном направлении), потом опять на одну и т.д. Может ли принц, встав на некоторую клетку, обойти все остальные клетки доски, побывав на каждой ровно по одному разу?

Ответ: Нет, не может.

Решение. Предположим, что такое возможно. Покрасим клетки доски как на рис.

1	1	2	2	1	1
1	1	2	2	1	1
2	2	1	1	2	2
2	2	1	1	2	2
1	1	2	2	1	1
1	1	2	2	1	1

Заметим, что при втором, четвертом, \dots , 34-м ходе принц меняет цвет клетки. Значит, количество клеток цветов 1 и 2 может отличаться не более чем на 2, поскольку все клетки, начиная со второй и заканчивая 34-й, бьются на пары вторая-третья, четвертая-пятая, тридцать четвертая-тридцать пятая, и внутри каждой пары клетки имеют разный цвет. Ну а первая и последняя клетки могут иметь любой цвет.

Таким образом, количество клеток цветов 1 и 2 отличается не более чем на 2. Но с другой стороны, клеток цвета 1 больше на 4 — противоречие.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 1 б. Присутствует идея раскраски доски в несколько цветов, но других продвижений нет.

Задача 11.6. Найдите все тройки вещественных чисел x, y, z , для которых справедливо равенство множеств:

$$\{x, y, z\} = \left\{ \frac{x-y}{y-z}, \frac{y-z}{z-x}, \frac{z-x}{x-y} \right\}.$$

Решение. Заметим, что $xyz = \frac{x-y}{y-z} \cdot \frac{y-z}{z-x} \cdot \frac{z-x}{x-y} = 1$, поэтому среди чисел x , y и z либо два отрицательных и одно положительное, либо все положительные. Без ограничения общности будем считать, что число x — наибольшее, тогда ясно, что числа $\frac{x-y}{y-z}$ и $\frac{y-z}{z-x}$ имеют разные знаки, значит, $x > 0 > y, z$. Разберем два случая.

Случай 1. $x > 0 > y > z$. В этом случае легко видеть, что $\frac{y-z}{x-z} < \frac{x-z}{x-y}$ (числитель меньше числителя, знаменатель больше знаменателя, и все разности положительны). Поэтому $0 > \frac{y-z}{z-x} > \frac{z-x}{x-y}$ и

$$x = \frac{x-y}{y-z}, \quad y = \frac{y-z}{z-x}, \quad z = \frac{z-x}{x-y}.$$

Домножая на знаменатели, получаем систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} xy - xz = x - y \\ yz - yx = y - z \\ zx - zy = z - x. \end{cases}$$

Заметим, что сумма трех этих равенств равна 0, поэтому можно рассматривать только первые два. Выражая из второго равенства переменную y , находим $y = \frac{z}{x-z+1}$. Подставляя это выражение в первое равенство и упрощая, получаем

$$z = \frac{-1-x}{x}, \quad y = \frac{-1}{1+x}.$$

Когда переменная x будет пробегать все возможные положительные значения, эти две формулы будут описывать соответствующие значения переменных y и z .

Заметим, что мы рассматривали случай, когда переменная x — наибольшая. Если придать переменной x отрицательные значения, полученные формулы будут давать ответ в ситуациях, когда наибольшей является переменная y или z . Таким образом, первая серия ответов выглядит следующим образом:

$$(x, y, z) = \left(t, -\frac{1}{t+1}, -\frac{1+t}{t} \right), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}.$$

Случай 2. $x > 0 > z > y$. В этом случае мы получаем аналогичную серию равенств:

$$x = \frac{y-z}{z-x}, \quad y = \frac{x-y}{y-z}, \quad z = \frac{z-x}{x-y}.$$

Домножая на знаменатели, получаем систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} xz - x^2 = y - z \\ y^2 - yz = x - y \\ zx - zy = z - x \end{cases}$$

Складывая эти равенства, получаем формулу $(x - y)(x + y - 2z) = 0$. Учитывая, что $x \neq y$, находим $2z = x + y$. Тогда $z - x = y - z$, и первое уравнение нашей системы переписывается в виде $x(z - x) = z - x$. Вновь вспоминая, что $x \neq z$, находим $x = 1$. Остается решить несложную систему $\begin{cases} z - yz = z - 1 \\ y + 1 = 2z. \end{cases}$ Решая ее, находим ответ $y = -2$ и $z = -\frac{1}{2}$ (мы учитываем, что $z > y$).

Вновь циклически переставляя найденные ответы, получаем еще три тройки:

$$\left(1, -2, -\frac{1}{2}\right), \quad \left(-\frac{1}{2}, 1, -2\right), \quad \left(-2, -\frac{1}{2}, 1\right).$$

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 4 б. Верно разобран случай 1, но случай 2 отсутствует или разобран неверно
- 3 б. Верно разобран случай 2, но случай 1 отсутствует или разобран неверно.
- 1 б. Доказано, что $xyz = 1$, другие продвижения отсутствуют.