Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2025

Заключительный этап   24 марта

6 класс

Задача 6.1. На столе выложены восемь карточек-цифр:

$$\boxed{2}\ \boxed{0}\ \boxed{2}\ \boxed{4}\ \boxed{2}\ \boxed{0}\ \boxed{2}\ \boxed{5}$$

Используя в записи только однозначные и двузначные числа расположите все карточки в нужном порядке и расставьте знаки действий $(+, -, \times, \div)$ и скобки между ними, чтобы в результате действий получилось 2025.

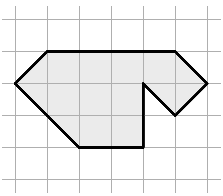
Ответ: $(2 \div 2 + 40 \times 2 + 0) \times 25 = 2025$

Критерии

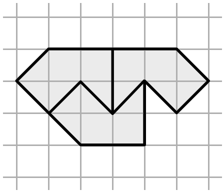
Любой корректный приведенный пример, удовлетворяющий условиям задач, оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого примера используются следующие критерии:

- 1 б. Приведен корректный способ расстановки знаков действий и скобок, но с использованием 3-х значных чисел (при этом четырёхзначные числа не используются).
- 0 б. Во всех остальных случаях.

Задача 6.2. Разрежьте данную фигуру на клетчатой сетке на три равные части.



Решение.



Критерии

- 7 б. Верный рисунок.
- 0 б. Во всех остальных случаях.

Задача 6.3. В алфавите племени АМУ-АМУ всего три буквы, А, М, У. Смысл слова в языке племени не меняется, если в любое место слова вставить сочетание МАМА или МУУ, либо вычеркнуть сочетание АМ или МУМ. Можно ли утверждать, что слова МАУМАУ и УММА несут одинаковый смысл?

Ответ: Да

Решение. Заметим, что операции +МАМА и –АМ не меняют разность между количеством гласных и согласных букв в слове, а +МУУ и –МУМ увеличивает разность между гласными и согласными на 1. Так как в слове УММА гласных и согласных поровну, а в слове МАУМАУ гласных на 2 больше, то операцию +МУУ или –МУМ суммарно можно использовать ровно два раза.

Ориентируясь на это соображение, покажем, как можно преобразовать слово УММА в МАУМАУ:

УММА

МАМАУММА**МУУ**

МАМАУММАМУ**МАМА**У

МАМАУММАМУМАМАУ

МАУММУМАУ

МАУМАУ

Критерии

Любой корректный приведенный пример перевода слова УММА в слово МАУМАУ оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого примера используются следующие критерии (баллы суммируются):

- 1 б. Замечено, что при любых операциях со словом, описанных в условии, разность между количеством гласных и согласных букв либо не меняется, либо увеличивается на 1.
- 1 б. Замечено, что в слове УММА равное количество гласных и согласных, а в слове МАУМАУ гласных на две больше, и следовательно, можно применять операцию +МУУ или –МУМ ровно два раза.

Задача 6.4. Аня и Боря играют в такую игру. У каждого изначально куча из 100 камней. Первая ходит Аня и убирает 1 камень из любой кучи. Каждый следующий игрок должен убрать из одной кучи (на его усмотрение) в два раза больше камней, чем убрал игрок в предыдущем ходу. Игра заканчивается, когда нельзя сделать ход, выигрывает тот, у кого останется больше камней. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: Боря

Решение. Так как ходы чередуются, а количество убираемых камней с каждым ходом увеличивается вдвое, то это количество определено заранее и чередуется между Аней и Борей: 1, 2, 4, 8, 16, 32 или 64 камня. Следующее значение 128 уже никогда не используется, так как камней изначально меньше.

Правильная стратегия Бори заключается в том, чтобы последним ходом Аня взяла 64 камня из своей кучи, оставив в куче Бори больше камней. Для этого Боря может каждый ход убирать камни из своей кучи — тогда после хода в 32 камня у Бори останется не более, чем $100-(2+8+32) = 58$ камней. При этом у Ани останется не менее $100-(1+4+16) = 79$ камней, а значит, следующим ходом Аня будет вынуждена забрать 64 камня из своей кучи и игра завершится с победой Бори.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 2 б. Присутствует здравая идея, что проигрывает тот, у кого последним ходом забирают из кучи 64 камня, но решение не доведено до конца.

- 0 б. Правильный ответ без доказательства.

Задача 6.5. На острове два лагеря жителей: рыцарей, всегда говорящих правду, и лжецов, всегда говорящих неправду. Однажды на острове построили кинотеатр с прямоугольным залом на 32 места (4 ряда по 8 мест). На премьере побывали 32 жителя, заняв все места в зале, причем каждый из них заявил, что среди соседей были представители обоих лагерей (два зрителя являются соседями, если один из них сидит слева, справа, сзади или спереди от другого). Какое наименьшее число лжецов могло быть среди зрителей на этой премьере?

Ответ: 8

Решение. Заметим, что среди соседей рыцаря обязательно был лжец. Значит, каждое место в кинотеатре либо было занято лжецом, либо является соседним к одному из лжецов. Назовем такие места (включая место лжеца) *близкими* к лжецу. У каждого лжеца может быть не более 5 близких мест.

Пусть на премьере находилось наименьшее возможное количество лжецов. Так как $6 \cdot 5 = 30 < 32$, то лжецов не менее 7.

Рассмотрим места по периметру кинотеатра (таких мест 20). У лжеца не может быть более 3-х близких мест по периметру, причем, если сам лжец не сидит с краю, то таких мест не более 2-х. Так как $5 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 19 < 20$, то по периметру сидит не менее 6 лжецов. Но для каждого лжеца, сидящего по периметру, всего приходится не более 4 близких мест. Так как $6 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 29 < 32$, то всего лжецов не может быть меньше 8.

Пример возможной рассадки лжецов на премьере показан на рисунке (все неотмеченные места заняты рыцарями).

	Л				Л		
			Л				Л
Л				Л			
		Л				Л	

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии (баллы суммируются):

- 2 б. Есть корректный пример на 8 лжецов, но доказательство неполное или отсутствует.
- 1 б. Есть обоснованная оценка, что лжецов не менее 7.