Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2025

Заключительный этап   24 марта

7 класс

Задача 7.1. Дано число $\frac{5}{99}$. Его разложили в бесконечную десятичную дробь, а затем перед каждой цифрой после запятой дописали цифру 2. Запишите получившееся число в виде несократимой рациональной дроби.

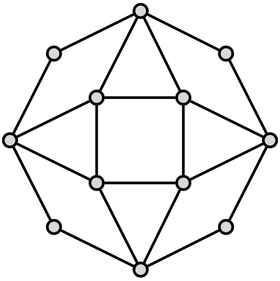
Решение. Заметим, что $5/99 = 0{,}050505\ldots$, поэтому после добавления двоек число станет равно $x = 0{,}20252025\ldots$. Тогда $10000x = 2025{,}2025\ldots = 2025 + x$, откуда $x = 2025/9999 = 225/1111$.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 3 б. Все шаги решения правильные, но ответ неверен из-за вычислительной ошибки.
- 1 б. Правильно записана десятичная дробь $0{,}20252025\ldots$, других продвижений нет.

Задача 7.2. На рисунке представлен план замка. Точки это башни замка, отрезки это стены замка. Сколькими способами можно назначить стражников на патрулирование этого замка так, чтоб маршрут каждого стражника был замкнут, проходил по одной стене не более одного раза и чтоб по каждой стене проходил ровно один маршрут?



Ответ: 6561.

Решение. Рассмотрим башню, из которой выходит две стены. Её можно удалить и соединить эти две стены в одну, никак не изменив ответ на задачу.

Рассмотрим башню, из которой выходит 4 стены. Существует ровно три способа разбить эти 4 стены на две пары, состоящие в одном маршруте.

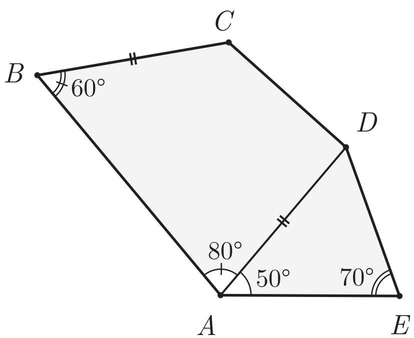
Башен, из которых исходит 4 стены, ровно 8. Поэтому искомых способов построить маршруты будет ровно $3^8 = 6561$.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 5 б. Если решение верное, но допущены арифметические ошибки.
- 1 б. Есть разумное соображение про то, что вершину степени два можно заменить на сплошную стену, но дальнейших продвижений нет.
- 0 б. Присутствует правильный ответ без наличия правильного решения.

Задача 7.3. В пятиугольнике $ABCDE$ известно, что $BC = AD$, $\angle ABC = 60°$, $\angle AED = 70°$, $\angle BAD = 80°$, $\angle EAD = 50°$. Докажите, что $AB+AD = CE+DE$.



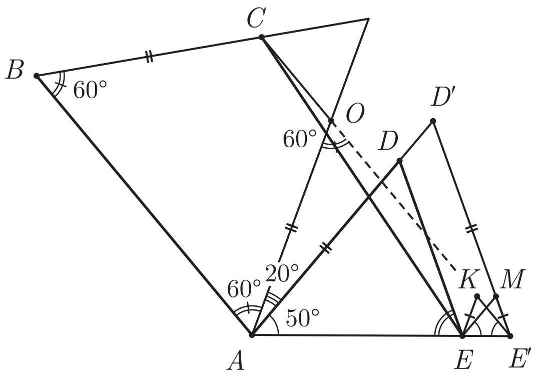
Решение. Докажем, что в действительности равенство $AB+AD = CE+DE$ никогда не выполняется и верно неравенство $AB + AD > CE + DE$.

Построим такую точку O, что $\angle OAB = 60°$, $AO = BC$. Тогда нетрудно получить, что $\angle AOC = 120°$ и $AO + CO = AB$ (это можно увидеть, если достроить четырёхугольник $ABCO$ до правильного треугольника).

Построим также дополнительный отрезок $E'D'$, параллельный ED, таким образом, что точка E' — пересечение прямых CO и AE, а точка D' — лежит на продолжении AD. Тогда $\angle D'E'A == 70° = \angle OAE$, $\angle D'AE' = 50° = \angle OE'A$. Треугольники $D'AE'$ и $OE'A$ равны по общей стороне и двум прилежащим углам.

Отметим на отрезках $E'D'$ и $E'O$ точки M и K соответственно так, что $\angle MEE' = 50°$, $\angle KEE' = 70°$. Тогда треугольники MEE' и $KE'E$ также равны по общей стороне и двум прилежащим углам.

Также нетрудно проверить, используя равенство соответствующих углов, что будут равны треугольники MED и $DD'M$.



Запишем теперь:

$$AB + AD = (AO + CO) + AD \qquad (1)$$

$$\text{и } CE + ED < (CK + KE) + ED = CK + KE + MD' \qquad (2)$$

Добавим к правой части (1) и (2) соответственно равные отрезки DD' и KE' и получим равные выражения:

$$(1) + DD' = AO + CO + AD' = AO + CO + OE' = AO + CE'$$

$$(2) + KE' = CE' + KE + MD' = CE' + E'M + MD' = CE' + E'D'$$

Значит, $AB + AD = (1) = (2) > CE + ED$.

Критерии

Любое полное доказательство невозможности требуемого равенства оценивается в 7 баллов.

Задача 7.4. Натуральные числа a и b таковы, что $a^2 - b^3 = ab$. Докажите, что число b является произведением двух последовательных натуральных чисел.

Решение. Запишем равенство в виде $(a - b)a = b^3$. Докажем, что a делится на b. Пусть $a = p^\alpha \cdot \ldots$ и $b = p^\beta \cdot \ldots$, где p — простое. Достаточно доказать, что $\alpha \geqslant \beta$. Предположим, что $\alpha < \beta$. Тогда в левую часть простое число p входит в степени 2α, а в правую — в степени 3β. Тогда $\alpha = 3\beta/2 > \beta$ — противоречие.

Разделим тогда наше равенство на b^2. Получаем, что $a/b = n$ — натуральное и $(n - 1)n = b$, что и требовалось доказать.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 3 б. Получено решение, в котором использовано, но не доказано утверждение о том, что a делится на b.
- 2 б. Доказано, что a делится на b, других продвижений нет.

Задача 7.5. Вася закрашивает некоторые клетки таблицы 6 на 6 в виде «змейки»: каждая следующая закрашиваемая клетка соседствует по стороне с предыдущей закрашенной клеткой, но при этом не соседствует ни с одной другой ранее закрашенной клеткой. Змейку какой наибольшей длины может таким образом нарисовать Вася?

Ответ: 24

2	3	4	5	6	7
1					8
	13	12	11	10	9
15	14				
16		20	21	22	23
17	18	19			24

Решение. Пример змейки в 24 клетки приведен на рисунке. Докажем, что змейка не может иметь большую длину.

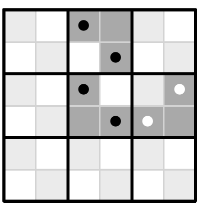
Разобьем все поле на 9 квадратов 2×2. Тогда в каждом таком квадрате помещается не более 3-х клеток змейки. Докажем, среди этих квадратов не может быть больше 6 квадратов, содержащих ровно 3 клетки змейки (назовем эти три клетки «уголком»). Это даст необходимую оценку $6 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 24$.

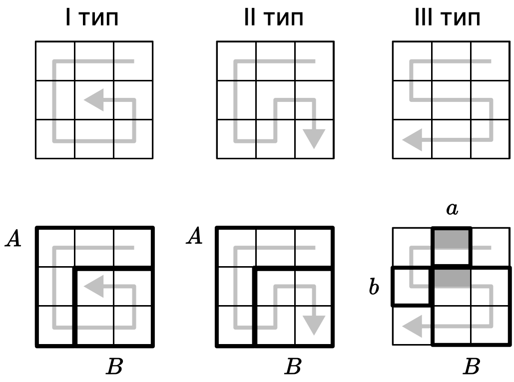
Мысленно применим шахматную раскраску клеток таблицы. Заметим, что если два соседних квадрата 2×2 содержат уголки, то диагональные клетки в уголках противоположны по цвету, если змейка переходит из одного квадрата в другой, и одинаковые — наоборот, если не переходит.

Без ограничения общности можно считать, что змейка обходит квадраты 2×2 по одному из трех маршрутов на рисунке (с точностью до симметрии и поворотов таблицы). Это не дает точное представление о форме змейки, однако позволяет оценить количество уголков.

Выделим в таблице часть A и часть B. Рассмотрим типы I и II. Часть B не может содержать более 3-х уголков (в противном случае цвета диагональных клеток уголков чередуются и замыкают змейку). Часть A не может содержать 5 уголков. Если A содержит 4 уголка, то тогда в части B верхние два квадрата не могут содержать уголки, и тогда уголков в части B не больше уже не больше 2-х. То есть в сумме при маршруте первых двух типов не может быть больше 6 уголков.

Пусть маршрут имеет тип III. Сколько бы клеток змейки ни было в центральном квадрате (две или три), две из них обязательно граничат либо с верхним либо с нижним квадратом, в котором, соответственно, будет не уголок, а ровно две клетки змейки, как на рисунке в квадрате a — будем считать, что этот квадрат верхний. Тогда в квадрате b не может быть уголка. Так же, как и в случае с первыми типами, часть B не может содержать более 3-х уголков. Значит в сумме снова не больше 6 уголков. Что и требовалось доказать.





Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии (баллы суммируются):

- 2 б. Приведен корректный пример на 24 клетки.
- 1 б. Доказана оценка на 27 клеток (например, использовано рассуждение, что квадрат 2×2 не содержит больше 3 клеток змейки).
- 1 б. Доказана оценка на 26 клеток.
- 1 б. Доказана оценка на 25 клеток.