Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2025

Заключительный этап 24 марта

8 класс

Задача 8.1. Маша и Медведь играют в игру. Дана клетчатая полоска из 2024 клеток. Сначала Медведь ставит в любую клетку баночку меда. Затем на каждом ходу Маша называет произвольное натуральное число, не превосходящее n, а Медведь должен передвинуть баночку меда ровно на n клеток, не выходя за пределы полоски. Маша выигрывает, если в какой-то момент Медведь не сможет этого сделать. Найдите наименьшее n, при котором Маша может выиграть.

Ответ: 2024

Решение. Заметим, что если $n \leqslant 2023$, то Медведь всегда сможет сделать ход. Для этого ему нужно поставить баночку меда в самую первую клетку полоски, тогда он сможет переставить ее на любое количество клеток, не превосходящее 2023. Передвигая баночку затем обратно на первую клетку, он будет ходить так бесконечно долго.

Осталось заметить, что при $n = 2024$ Медведь проигрывает, поскольку не может сделать даже один ход: расстояние между крайними клетками полоски равно 2023 клетки, а ему нужно сделать ход на 2024 клетки.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 7 б. Приведён пример наименьшего $n = 2024$.

Задача 8.2. Дана четырехугольная пирамида. На каждой ее грани написано число 0. За один ход разрешается выбрать любую вершину и изменить (т.е. увеличить или уменьшить) числа на всех гранях, содержащих эту вершину, на 1. Можно ли такими операциями добиться, чтобы на всех гранях пирамиды (в том числе и на основании) было бы написано число 2?

Ответ: Можно

Решение. Сделаем три операции: в вершине пирамиды и в двух противоположных вершинах ее основания. Легко видеть, что после этих операций на каждой грани будет написано число 2.

Замечание. Интересно отметить, что получить на каждой грани число 1 невозможно. Для этого обозначим через A число, которое написано на основании пирамиды, а через B — сумму чисел, написанных на боковых гранях. Посмотрим, как изменяются числа A и B, если применить операцию к вершине пирамиды и к вершине основания:

A	A	$A \pm 1$
B	$B \pm 4$	$B \pm 2$

Заметим, что величина $B - 2A$ при этом либо изменяется на 4, либо не изменяется вовсе. В начале она равна 0, а в конце должна равняться 2. Но, двигаясь только с шагом 4, невозможно попасть из 0 в 2.

Критерии

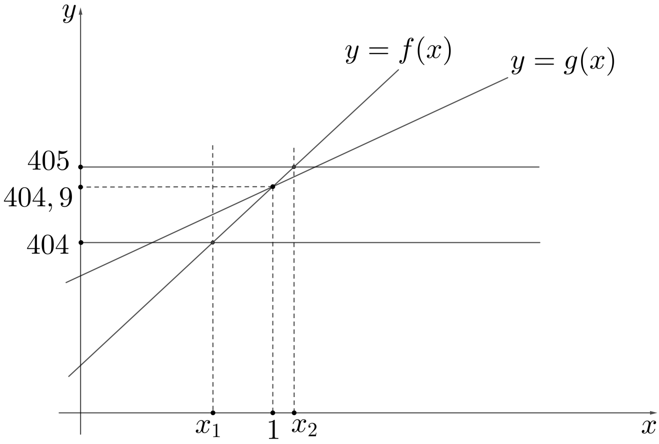
Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В противном случае ставится 0 баллов.

Задача 8.3. Докажите, что множество решений уравнения

$$[202{,}5x + 202{,}4] = [202{,}4x + 202{,}5]$$

содержит интервал длины не менее $2/405$.

Решение. Пусть $f(x) = 202{,}5x + 202{,}4$ и $g(x) = 202{,}4x + 202{,}5$. Заметим, что $x = 1$ является решением нашего уравнения, поскольку $f(1) = g(1) = 404{,}9$. Изобразим на координатной плоскости графики функций f и g. Проведем прямые $y = 404$ и $y = 405$, пересекающие прямую $y = f(x)$ в точках x_1 и x_2 соответственно. Очевидно, любое число из интервала $(x_1; x_2)$ является решением нашего уравнения, поскольку для любого x из этого промежутка $[202{,}5x + 202{,}4] = [202{,}4x + 202{,}5] = 404$.



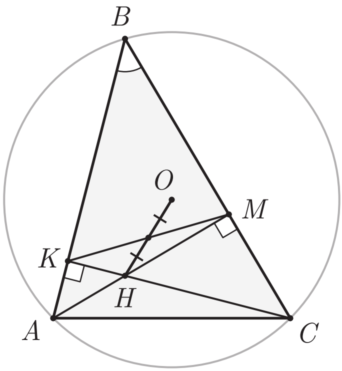
Вычислим x_1 и x_2: $x_1 = \dfrac{404 - 202{,}4}{202{,}5}$ и $x_2 = \dfrac{405 - 202{,}4}{202{,}5}$. Ясно, что $x_2 - x_1 = \dfrac{1}{202{,}5} = \dfrac{2}{405}$,что и требовалось.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

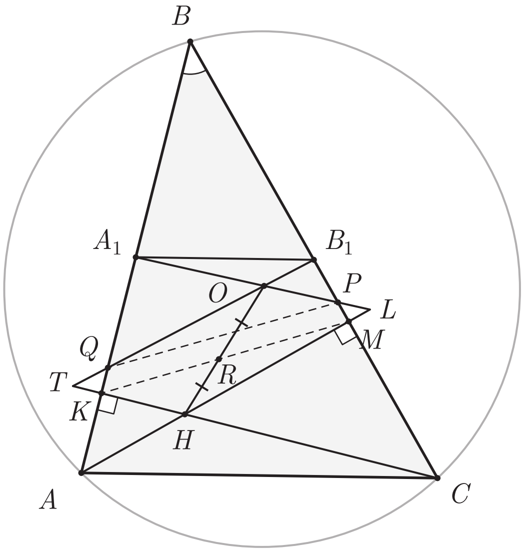
- 4 б. Все шаги решения правильные, но доказательство неверно из-за вычислительной ошибки.
- 2 б. В решении доказано, что множество решений уравнения содержит интервал (например, рассуждением, что в малой окрестности точки $x = 1$ равенство остается справедливым), но длина интервала меньше требуемой или не вычислена вовсе.
- 0 б. Написаны какие-то отдельные оценки на решения уравнения или приведены отдельные решения.

Задача 8.4. Треугольник ABC вписали в окружность с центром O. Его высоты AM и CK пересекаются в точке H. Оказалось, что прямая MK делит отрезок OH пополам. Чему может быть равен угол ABC?



Ответ: 45° или 135°.

Решение. Из середин A_1 и B_1 соответственно сторон AB и BC проведем серединные перпендикуляры A_1P и B_1Q до пересечения с другими сторонами в точках P и Q соответственно.



Воспользуемся фактом, что отрезок, соединяющий основания двух высот треугольника, отсекает от него соответствующим образом подобный треугольник (это нетрудно показать из равенства углов исходного и отсекаемого треугольника). Тогда треугольник A_1BB_1 подобен треугольнику PBQ, а треугольник MBK подобен треугольнику ABC.

Так как A_1C_1 — средняя линия треугольника ABC, то треугольники A_1BC_1 и ABC подобны. Следовательно, треугольники PBQ и MBK тоже подобны, и $PQ \parallel KM$.

Пусть $(AM) \cap (OP) = L$, $(OQ) \cap (CK) = T$. Тогда четырёхугольник $TOLH$ — параллелограмм. Так как R — середина OH, то R — центр этого параллелограмма. Значит, KM совпадает с PQ.

Так как вершина M лежит на серединном перпендикуляре к AB, то треугольник AMB равнобедренный с углом $ABM = 45°$. Если в изначальном треугольнике угол ABC острый, то он равен углу ABM, то есть $45°$. Если же угол ABC тупой, то он равен $180° - \angle ABM = 135°$.

Замечание. Задачу можно решить через окружность 9 точек. Тогда ее центр лежит на KM и ортотреугольник тогда будет прямоугольным. Отсюда получаем те же ответы.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 4 б. Присутствует полное решение, но только для случая острого угла B.
- 2 б. Присутствует рассуждение с опорой на то, что отрезки QP и KM совпадают, без доказательства с разбором обоих случаем.
- 1 б. Присутствует рассуждение с опорой на то, что отрезки QP и KM совпадают, без доказательства с разбором одного случая.

Задача 8.5. Натуральные числа a и b таковы, что $a^3 - b^4 = ab^2$. Докажите, что число b является произведением трех последовательных натуральных чисел.

Решение. Запишем равенство в виде $(a-b)a(a+b) = b^4$. Докажем, что a делится на b. Пусть $a = p^\alpha \cdot \ldots$ и $b = p^\beta \cdot \ldots$, где p — простое. Достаточно доказать, что $\alpha \geqslant \beta$. Предположим, что $\alpha < \beta$. Тогда в левую часть простое число p входит в степени 3α, а в правую — в степени 4β. Тогда $\alpha = 4\beta/3 > \beta$ — противоречие.

Разделим тогда наше равенство на b^3. Получаем, что $a/b = n$ — натуральное и $(n-1)n(n+1) = b$, что и требовалось доказать.

Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 3 б. Получено решение, в котором использовано, но не доказано утверждение о том, что a делится на b.
- 2 б. Доказано, что a делится на b, других продвижений нет.