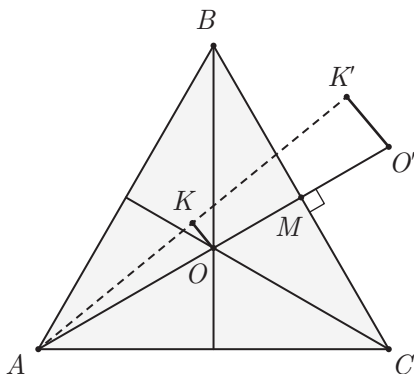


**Задача 9.1.** узнечик сидит в вершине правильного треугольника со стороной 1. Каждый ход кузнечик выбирает одну из вершин треугольника и прыгает в направлении к ней, уменьшая расстояние до этой вершины вдвое. Может ли кузнечик за несколько прыжков оказаться ближе, чем на 0,1 от точки пересечения медиан треугольника?

**Ответ:** Нет.

**Решение.** Рассмотрим обратный ход. Пусть кузнечик смог в конце оказаться в точке  $K$ , находящейся на расстоянии меньшем, чем 0,1 от точки пересечения медиан  $O$ . И пусть его последний прыжок из точки  $K'$  в точку  $K$  был в направлении вершины треугольника  $A$ . Тогда по условию задачи  $AK' = 2AK$ .

Продлим медиану  $AM$  до точки  $O'$  так, что точка  $O'$  окажется на расстоянии  $AO' = 2AO$ . Тогда треугольники  $AK'O'$  и  $AKO$  подобны с коэффициентом 2 и  $K'O' = 2KO < 0,2$ . Но длина перпендикуляра  $O'M$  от точки  $O'$  до стороны  $BC$  равно  $\frac{1}{3}AM = \frac{\sqrt{3}}{6} > 0,2$ , так что точка  $K'$  не может быть внутри треугольника  $ABC$ . Противоречие, значит, кузнечик не мог оказаться в точке  $K$ , и не мог оказаться ближе 0,2 к точке  $O$ .



### Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии (критерии суммируются):

- 2 б. Рассмотрена идея обратного хода с попыткой выяснить, из какой точки кузнечик мог прыгнуть и оказаться близко к центру треугольника.
- 1 б. Есть рассуждение в правильном направлении о том, что кузнечик на предыдущем ходе не может находиться внутри треугольника, но доказательство частичное или нет должного обоснования.

**Задача 9.2.** учитель написал на доске приведённое квадратное уравнение  $x^2 + px + q = 0$  с целыми коэффициентами. Ученик Петя находит корни этого уравнения. Если оба корня окажутся целыми, то учитель составляет новое уравнение такого же типа, у которого вместо  $p$  и  $q$  стоят эти корни в том порядке, в каком захочет учитель. Если корни не целые или их нет вовсе, то Петя идет домой. Учитель очень хочет, чтобы Петя не попал домой никогда. При каких значениях  $p$  и  $q$  ему это удастся?

**Ответ:**  $p = 1, q = -2$  и  $q = 0$ , — любое.

**Решение.** Уравнение  $x^2 + x - 2 = 0$  имеет корни 1 и  $-2$ , которые учительница может именно в таком порядке подставить вместо  $p$  и  $q$ , получив то же самое уравнение. Уравнение  $x^2 + px = 0$  имеет корни  $-p$  и 0, что позволяет получить уравнение  $x^2 - px = 0$  с корнями 0 и  $p$ . Далее снова выписывается уравнение  $x^2 + px = 0$  и процесс зацикливается.

Докажем, что другие трёхчлены не годятся. Рассмотрим величину  $q^2 + p^2$ . На следующем шаге она переходит в величину  $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q$ , что меньше  $q^2 + p^2$ , если целое число  $q$  отлично от 0,  $-1$ ,  $-2$ . Многочлены с такими коэффициентами, имеющие целые корни это:  $x^2 + px = 0$ ,  $x^2 + x - 2 = 0$  и  $x^2 - 1 = 0$ . Но ясно, что эти многочлены могут получиться только, если на предыдущем шаге были уравнения всё того же вида  $x^2 + px = 0$ , и  $x^2 + x - 2 = 0$ . Значит, если начальные трёхчлены были не такими, то они и не появятся. Тогда ясно, что натуральное число  $q^2 + p^2$  всё время убывает. Это значит, что когда-нибудь процесс закончится, и Петя пойдёт домой.

### **Критерии**

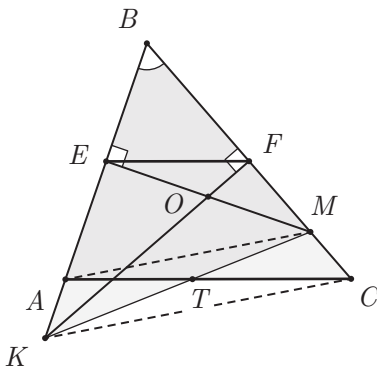
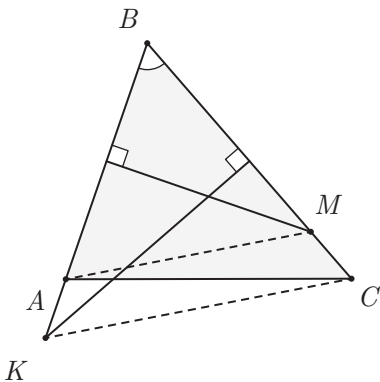
Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 3 б. Доказано, что при всех  $q$ , кроме конечного числа, процесс остановится.

- 2 б. Доказано, что пары  $(p, 0)$  и  $(1, -2)$  подходят, других продвижений нет.
- 1 б. Доказано, что пара  $(1, -2)$  подходит, других продвижений нет.
- 1 б. Доказано, что пара  $(p, 0)$  подходит, других продвижений нет.

**Задача 9.3.** ерединные перпендикуляры к сторонам  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  пересекают прямые  $BC$  и  $AB$  в точках  $M$  и  $K$ . Оказалось, что прямые  $AM$  и  $CK$  параллельны. Чему может быть равен угол  $ABC$ ?

**Ответ:**  $60^\circ$  или  $120^\circ$ .



**Решение.** Пусть точка  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $ABC$ ,  $\angle ABC = \beta < 90^\circ$ . Треугольники  $EBF$  и  $MBK$  подобны (равны все их углы), следовательно,  $\frac{EF}{MK} = \frac{BF}{BK} = \cos \beta$ . Отрезок  $EF$  — средняя линия в треугольнике, значит,  $AC = 2EF$ . Тогда  $MK = \frac{AC}{2 \cos \beta}$  при  $\beta < 90^\circ$  и  $MK = \frac{-AC}{2 \cos \beta}$  при  $\beta > 90^\circ$ .

Треугольники  $ABC$  и  $MBK$  подобны, так как  $AM \parallel CK$ . Площади маленьких треугольников  $AKT$  и  $СMT$  равны из трапеции  $AKCM$ . Значит, равны площади больших треугольников  $ABC$  и  $MBK$ , а, значит, равны и сами треугольники. Тогда  $\frac{AC}{2|\cos \beta|} = AC$ , откуда  $|\cos \beta| = \frac{1}{2}$ . Следовательно,  $\beta$  принимает значение  $60^\circ$  или  $120^\circ$ .

### Критерии

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии (критерии суммируются):

- 1 б. Замечено подобие треугольников  $EBF$  и  $MBK$  и связь отрезков  $EF, MK$  и угла  $\beta$ .
- 1 б. Замечено подобие треугольников  $ABC$  и  $MBK$ .
- 1 б. Доказано, что треугольники  $ABC$  и  $MBK$  равны.
- 1 б. Верно найдено одно из значений искомого угла  $\beta$ .

**Задача 9.4.** Назовем набор положительных вещественных чисел  $(a_1, \dots, a_k)$  *волшебным*, если уравнение  $[a_1n] + [a_2n] + \dots + [a_kn] = n$  имеет бесконечно много натуральных решений. Докажите, что набор является волшебным тогда и только тогда, когда  $a_1 + \dots + a_k = 1$  и все  $a_i$  — положительные рациональные числа.

**Решение.** Заметим, что  $n = [a_1n] + [a_2n] + \dots + [a_kn] \leq a_1n + a_2n + \dots + a_kn$ , откуда  $a_1 + \dots + a_k \geq 1$ . Пусть  $a_1 + \dots + a_k = 1 + t$ , где  $t \geq 0$  — некоторое вещественное число. Тогда  $n + tn = a_1n + \dots + a_kn$ . Вычитая из этого равенства соотношение  $n = [a_1n] + [a_2n] + \dots + [a_kn]$ , получаем, что  $\{a_1n\} + \{a_2n\} + \dots + \{a_kn\} = nt$ . Левая часть находится в промежутке от 0 до  $k$ , а правая часть будет больше  $k$  при всех достаточно больших  $n$ , если только  $t \neq 0$ . Значит,  $t = 0$  и  $a_1 + \dots + a_k = 1$ .

Далее, мы замечаем, что  $\{a_1n\} + \{a_2n\} + \dots + \{a_kn\} = 0$ , откуда получаем, что  $a_in = [a_in]$  для всех  $i$ . Значит,  $a_i = [a_in]/n$  — рациональное число.

Обратно, докажем, что если  $a_1, \dots, a_k$  — положительные рациональные числа с суммой 1, то уравнение  $[a_1n] + [a_2n] + \dots + [a_kn] = n$  имеет бесконечно много решений. В самом деле, пусть  $D$  — наименьший общий знаменатель чисел  $a_1, \dots, a_k$ . Тогда все числа вида  $cD$ , где  $c$  — произвольное натуральное число, очевидно, будут решениями.

### **Критерии**

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

- 2 б. Доказано, что если сумма чисел равна 1, а сами числа положительные рациональные, то набор волшебный.
- 3 б. Доказано, что если набор волшебный, то сумма чисел равна 1, а сами числа положительные рациональные.
- 2 б. Доказано, что если набор волшебный, то сумма чисел равна 1, других продвижений нет.

**Задача 9.5.** покажите, что для любого натурального  $n > 2$  можно расставить числа от 1 до  $n^2$  в клетках таблицы  $n \times n$  таким образом, чтобы средние арифметические чисел в каждой строке и каждом столбце были бы натуральными числами.

**Решение.** Будем рассматривать остатки наших чисел по модулю  $n$ . Тогда задача формулируется следующим образом. У нас есть числа  $0, 1, \dots, n - 1$ , каждого ровно  $n$  штук. Нужно расставить эти числа в таблице  $n \times n$  так, чтобы сумма чисел в любом ряду (строке или столбце) делилась бы на  $n$ .

Если  $n$  нечетно, расставим числа так:

0	1	2	...	$n - 1$
0	1	2	...	$n - 1$
...	...	...	...	...
0	1	2	...	$n - 1$

Ясно, что сумма чисел в любом столбце делится на  $n$ . В каждой строчке сумма чисел равна  $0 + 1 + \dots + (n - 1) = \frac{n(n - 1)}{2}$ . Поскольку  $n$  нечетно, число  $\frac{n - 1}{2}$  целое, а значит, наша сумма делится на  $n$ .

В случае  $n = 4k$  подходит такая расстановка:

1	$4k - 1$	2	$4k - 2$	...	$2k - 1$	$2k + 1$	$2k$	$2k$
1	$4k - 1$	2	$4k - 2$	...	$2k - 1$	$2k + 1$	$2k$	$2k$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	$4k - 1$	2	$4k - 2$	...	$2k - 1$	$2k + 1$	$2k$	$2k$
1	$4k - 1$	2	$4k - 2$	...	$2k - 1$	$2k + 1$	0	0
1	$4k - 1$	2	$4k - 2$	...	$2k - 1$	$2k + 1$	0	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	$4k - 1$	2	$4k - 2$	...	$2k - 1$	$2k + 1$	0	0

Вновь видно, что в каждом столбце сумма чисел кратна  $4k$ , а в каждой строке сумма чисел складывается из пар рядом стоящих чисел, а сумма в каждой паре кратна  $4k$ .

Наконец, рассмотрим случай  $n = 4k + 2$ . В этом случае конструкция выглядит следующим образом. Рассмотрим следующие блоки:

1	$4k + 1$	0	0
$2k$	$2k + 2$	0	0
$2k + 1$	0	$2k$	1
0	$2k + 1$	$2k + 2$	$4k + 1$

и 

$x$	$4k + 2 - x$
$4k + 2 - x$	$x$

, где  $x = 1, \dots, 4k + 1$ .

Теперь поставим сначала блок  $4 \times 4$ , а затем будем достраивать к нему каемку из оставшихся блоков. Легко видеть, что в каждом ряду каждого блока сумма чисел делится на  $4k + 2$ , поэтому это же условие будет справедливо и для всей таблицы.

### ***Критерии***

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии (баллы за них суммируются):

- 4 б. Доказано, что при  $n = 4k + 2$  расстановка существует.
- 2 б. Доказано, что при  $n = 4k$  расстановка существует.
- 1 б. Доказано, что при нечетном  $n$  расстановка существует, других движений нет.