Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2025

Заключительный этап   24 марта

9 класс

Задача 9.1. узнечик сидит в вершине правильного треугольника со стороной 1. Каждый ход кузнечик выбирает одну из вершин треугольника и прыгает в направлении к ней, уменьшая расстояние до этой вершины вдвое. Может ли кузнечик за несколько прыжков оказаться ближе, чем на 0,1 от точки пересечения медиан треугольника?

Задача 9.2. Учитель написал на доске приведённое квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ с целыми коэффициентами. Ученик Петя находит корни этого уравнения. Если оба корня окажутся целыми, то учитель составляет новое уравнение такого же типа, у которого вместо p и q стоят эти корни в том порядке, в каком захочет учитель. Если корни не целые или их нет вовсе, то Петя идет домой. Учитель очень хочет, чтобы Петя не попал домой никогда. При каких значениях p и q ему это удастся?

Задача 9.3. ерединные перпендикуляры к сторонам AB и BC треугольника ABC пересекают прямые BC и AB в точках M и K. Оказалось, что прямые AM и CK параллельны. Чему может быть равен угол ABC?

Задача 9.4. азовем набор положительных вещественных чисел $(a_1, \ldots, a_k)$ *волшебным*, если уравнение $[a_1 n] + [a_2 n] + \ldots + [a_k n] = n$ имеет бесконечно много натуральных решений. Докажите, что набор является волшебным тогда и только тогда, когда $a_1 + \ldots + a_k = 1$ и все a_i — положительные рациональные числа.

Задача 9.5. окажите, что для любого натурального $n > 2$ можно расставить числа от 1 до n^2 в клетках таблицы $n \times n$ таким образом, чтобы средние арифметические чисел в каждой строке и каждом столбце были бы натуральными числами.