Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2025

Отборочный этап 10 февраля

6 и 7 классы

Задача 6.1 [вариант 1] На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Каждый из 2025 жителей сказал: “на острове не менее N лжецов”, где N — некоторое натуральное число. Какое максимальное количество рыцарей может быть на острове, если все высказывания различны?

Ответ: 1012

Решение. Предположим, что рыцарей на острове как минимум 1013, что больше половины всех жителей. Так как все высказывание различны, то среди высказываний рыцарей найдётся такое, в котором число $N \geqslant 1013$. Но это будет противоречить правдивости высказывания этого рыцаря.

Для случая с 1012 рыцарями достаточно привести пример, когда в их высказываниях используются числа от 2 до 1013, и остальные жители лжецы используют в своих высказываниях число от 1014 до 2026.

Задача 6.1 [вариант 2] На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Каждый из 1025 жителей сказал: “на острове не менее N лжецов”, где N — некоторое натуральное число. Какое максимальное количество рыцарей может быть на острове, если все высказывания различны?

Ответ: 512

Решение. Предположим, что рыцарей на острове как минимум 513, что больше половины всех жителей. Так как все высказывание различны, то среди высказываний рыцарей найдётся такое, в котором число $N \geqslant 513$. Но это будет противоречить правдивости высказывания этого рыцаря.

Для случая с 512 рыцарями достаточно привести пример, когда в их высказываниях используются числа от 2 до 513, и остальные жители лжецы используют в своих высказываниях число от 514 до 1026.

Задача 6.1 [вариант 3] На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Каждый из 3025 жителей сказал: “на острове не менее N лжецов", где N — некоторое натуральное число. Какое максимальное количество рыцарей может быть на острове, если все высказывания различны?

Ответ: 1512

Решение. Предположим, что рыцарей на острове как минимум 1023, что больше половины всех жителей. Так как все высказывание различны, то среди высказываний рыцарей найдётся такое, в котором число $N \geqslant 1023$. Но это будет противоречить правдивости высказывания этого рыцаря.

Для случая с 1512 рыцарями достаточно привести пример, когда в их высказываниях используются числа от 2 до 1513, и остальные жители лжецы используют в своих высказываниях число от 1514 до 3026.

Задача 6.1 [вариант 4] На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Каждый из 4025 жителей сказал: "на острове не менее N лжецов", где N — некоторое натуральное число. Какое максимальное количество рыцарей может быть на острове, если все высказывания различны?

Ответ: 2012

Решение. Предположим, что рыцарей на острове как минимум 2013, что больше половины всех жителей. Так как все высказывание различны, то среди высказываний рыцарей найдётся такое, в котором число $N \geqslant 2013$. Но это будет противоречить правдивости высказывания этого рыцаря.

Для случая с 2012 рыцарями достаточно привести пример, когда в их высказываниях используются числа от 2 до 2013, и остальные жители лжецы используют в своих высказываниях число от 2014 до 4026.

Задача 6.2 [вариант 1] Натуральное число заканчивается на 8. Если эту цифру зачеркнуть, а в начале числа приписать 10, то данное число станет в три раза больше. Найдите наименьшее такое число.

Ответ: 3448

Решение. Представим число в виде $\overline{\ldots cba8}$. Тогда По условию задачи можно записать

$$\overline{10\dots cba} = 3\cdot\overline{\dots cba8}.$$

Будем последовательно умножать исходное число на 3 в столбик:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2}\\ \times\ \dots cba8\\ 3\\ \hline \dots cb4 \end{array} \to \begin{array}{r} {\scriptstyle 12}\\ \times\ \dots cb48\\ 3\\ \hline \dots c44 \end{array} \to \begin{array}{r} {\scriptstyle 112}\\ \times\ \dots c448\\ 3\\ \hline \dots 344 \end{array} \to \begin{array}{r} {\scriptstyle 112}\\ \times\ 3448\\ 3\\ \hline 10344 \end{array}$$

На шаге, когда появляются цифры 10 мы останавливаемся и получаем искомое число 3448.

Задача 6.2 [вариант 2] Натуральное число заканчивается на 6. Если эту цифру зачеркнуть, а в начале числа приписать 22, то данное число станет в три раза больше. Найдите наименьшее такое число.

Ответ: 7586

Решение. Представим число в виде $\overline{\dots cba6}$. Тогда По условию задачи можно записать

$$\overline{22\dots cba} = 3\cdot\overline{\dots cba6}.$$

Будем последовательно умножать исходное число на 3 в столбик:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2}\\ \times\ \dots cba6\\ 3\\ \hline \dots cb8 \end{array} \to \begin{array}{r} {\scriptstyle 12}\\ \times\ \dots cb86\\ 3\\ \hline \dots c58 \end{array} \to \begin{array}{r} {\scriptstyle 112}\\ \times\ \dots c586\\ 3\\ \hline \dots 758 \end{array} \to \begin{array}{r} {\scriptstyle 112}\\ \times\ 7586\\ 3\\ \hline 22758 \end{array}$$

На шаге, когда появляются цифры 22 мы останавливаемся и получаем искомое число 7586.

Задача 6.2 [вариант 3] Натуральное число заканчивается на 5. Если эту цифру зачеркнуть, а в начале числа приписать 28, то данное число станет в три раза больше. Найдите наименьшее такое число.

Ответ: 9655

Решение. Представим число в виде $\overline{\ldots cba5}$. Тогда По условию задачи можно записать
$$\overline{27\ldots cba} = 3 \cdot \overline{\ldots cba5}.$$

Будем последовательно умножать исходное число на 3 в столбик:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ \times\;\; \ldots cba5 \\ 3 \\ \hline \ldots cb5 \end{array} \to \begin{array}{r} {\scriptstyle 11} \\ \times\;\; \ldots cb55 \\ 3 \\ \hline \ldots c65 \end{array} \to \begin{array}{r} {\scriptstyle 111} \\ \times\;\; \ldots c655 \\ 3 \\ \hline \ldots 965 \end{array} \to \begin{array}{r} {\scriptstyle 111} \\ \times\;\; 9655 \\ 3 \\ \hline 28965 \end{array}$$

На шаге, когда появляются цифры 27 мы останавливаемся и получаем искомое число 9655.

Задача 6.2 [вариант 4] Натуральное число заканчивается на 9. Если эту цифру зачеркнуть, а в начале числа приписать 12, то данное число станет в три раза больше. Найдите наименьшее такое число.

Ответ: 41379

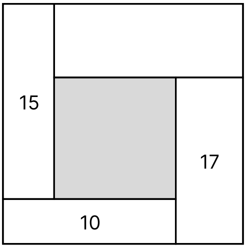
Решение. Представим число в виде $\overline{\ldots cba9}$. Тогда По условию задачи можно записать
$$\overline{15\ldots dcba} = 3 \cdot \overline{\ldots dcba9}.$$

Будем последовательно умножать исходное число на 3 в столбик:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2} \\ \times\;\; \ldots dcba9 \\ 3 \\ \hline \ldots dcb7 \end{array} \to \begin{array}{r} {\scriptstyle 22} \\ \times\;\; \ldots dcb79 \\ 3 \\ \hline \ldots dc37 \end{array} \to \begin{array}{r} {\scriptstyle 122} \\ \times\;\; \ldots dc379 \\ 3 \\ \hline \ldots d137 \end{array} \to \begin{array}{r} {\scriptstyle 122} \\ \times\;\; \ldots d1379 \\ 3 \\ \hline \ldots 4137 \end{array} \to \begin{array}{l} \\ \times\;\; 4 \\ \\ \hline 12 \end{array}$$

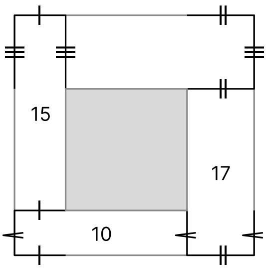
На шаге, когда появляются цифры 15 мы останавливаемся и получаем искомое число 41379.

Задача 6.3 [вариант 1] Квадрат разрезали на меньший квадрат и четыре прямоугольника так, как это показано на рисунке. На нём отмечены периметры трёх из этих прямоугольников. Найдите сторону исходного квадрата.

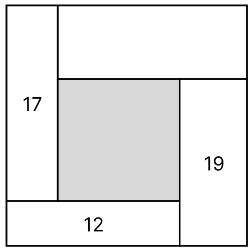


Ответ: 8

Решение. Рассмотрим отрезки, из которых состоят стороны большего квадрата, если эти стороны разбить продолжением всех сторон меньшего квадрата. Обозначим на чертеже равные отрезки равными штрихами (см. рис.). Нетрудно видеть, что сумма периметров прямоугольников с заданными периметрами 15 и 17 и сумма периметров двух оставшихся прямоугольников равны. Кроме того, каждая из этих сумм равна периметру большего квадрата. Следовательно, длина стороны большего квадрата равна $(15 + 17) : 4 = 8$.

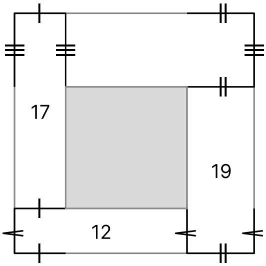


Задача 6.3 [вариант 2] Квадрат разрезали на меньший квадрат и четыре прямоугольника так, как это показано на рисунке. На нём отмечены периметры трёх из этих прямоугольников. Найдите сторону исходного квадрата.

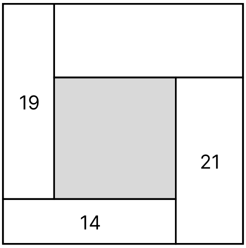


Ответ: 9

Решение. Рассмотрим отрезки, из которых состоят стороны большего квадрата, если эти стороны разбить продолжением всех сторон меньшего квадрата. Обозначим на чертеже равные отрезки равными штрихами (см. рис.). Нетрудно видеть, что сумма периметров прямоугольников с заданными периметрами 17 и 19 и сумма периметров двух оставшихся прямоугольников равны. Кроме того, каждая из этих сумм равна периметру большего квадрата. Следовательно, длина стороны большего квадрата равна $(17 + 19) : 4 = 9$.

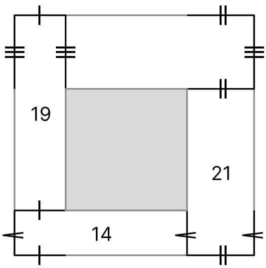


Задача 6.3 [вариант 3] Квадрат разрезали на меньший квадрат и четыре прямоугольника так, как это показано на рисунке. На нём отмечены периметры трёх из этих прямоугольников. Найдите сторону исходного квадрата.

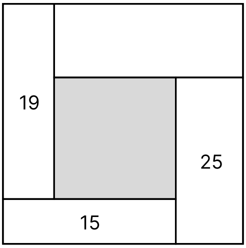


Ответ: 10

Решение. Рассмотрим отрезки, из которых состоят стороны большего квадрата, если эти стороны разбить продолжением всех сторон меньшего квадрата. Обозначим на чертеже равные отрезки равными штрихами (см. рис.). Нетрудно видеть, что сумма периметров прямоугольников с заданными периметрами 19 и 21 и сумма периметров двух оставшихся прямоугольников равны. Кроме того, каждая из этих сумм равна периметру большего квадрата. Следовательно, длина стороны большего квадрата равна $(19 + 21) : 4 = 10$.

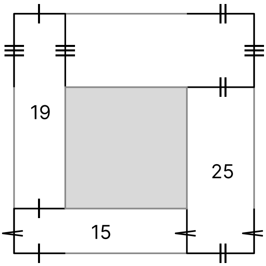


Задача 6.3 [вариант 4] Квадрат разрезали на меньший квадрат и четыре прямоугольника так, как это показано на рисунке. На нём отмечены периметры трёх из этих прямоугольников. Найдите сторону исходного квадрата.



Ответ: 11

Решение. Рассмотрим отрезки, из которых состоят стороны большего квадрата, если эти стороны разбить продолжением всех сторон меньшего квадрата. Обозначим на чертеже равные отрезки равными штрихами (см. рис.). Нетрудно видеть, что сумма периметров прямоугольников с заданными периметрами 19 и 25 и сумма периметров двух оставшихся прямоугольников равны. Кроме того, каждая из этих сумм равна периметру большего квадрата. Следовательно, длина стороны большего квадрата равна $(19 + 25) : 4 = 11$.



Задача 6.4 [вариант 1] На часах с циферблатом три стрелки с плавным ходом: часовая, минутная и секундная. Момент времени, когда положение двух или трёх стрелок совпадает назовём *счастливым*. Сколько счастливых моментов случается на часах в день с 8:30 до 14:30?

Ответ: 717

Решение. Если секундная стрелка указывает на 12, то счастливым такой момент времени может быть только тогда, когда минутная тоже указывает на 12. Всего таких моментов в указанном диапазоне времени 6. Далее эти моменты времени учитывать не будем.

Секундная и минутная стрелки совпадают один раз каждую минуту, кроме минуты непосредственно до ровного часа, и сразу после. Всего $360 - 6 \cdot 2 = 348$.

Секундная и часовая стрелки совпадают один раз каждую минуту, кроме минуты непосредственно до 12:00, и сразу после. Всего $360 - 2 = 358$.

И наконец, минутная и часовая стрелки совпадают один раз за первые полчаса, за последние полчаса, а также каждый час с 9:00 до 11:00 и с 13:00 до 14:00. Всего таких моментов 5.

Итого $6 + 348 + 358 + 5 = 717$ счастливых моментов.

Задача 6.4 [вариант 2] На часах с циферблатом три стрелки с плавным ходом: часовая, минутная и секундная. Момент времени, когда положение двух или трёх стрелок совпадает назовём *счастливым*. Сколько счастливых моментов случается на часах в день с 9:30 до 14:30?

Ответ: 597

Решение. Если секундная стрелка указывает на 12, то счастливым такой момент времени может быть только тогда, когда минутная тоже указывает на 12. Всего таких моментов в указанном диапазоне времени 5. Далее эти моменты времени учитывать не будем.

Секундная и минутная стрелки совпадают один раз каждую минуту, кроме минуты непосредственно до ровного часа, и сразу после. Всего $300 - 5 \cdot 2 = 290$.

Секундная и часовая стрелки совпадают один раз каждую минуту, кроме минуты непосредственно до 12:00, и сразу после. Всего $300 - 2 = 298$.

И наконец, минутная и часовая стрелки совпадают один раз за первые полчаса, за последние полчаса, а также с 10:00 до 11:00 и с 13:00 до 14:00. Всего таких моментов 4.

Итого $5 + 290 + 298 + 4 = 597$ счастливых моментов.

Задача 6.4 [вариант 3] На часах с циферблатом три стрелки с плавным ходом: часовая, минутная и секундная. Момент времени, когда положение двух или трёх стрелок совпадает назовём *счастливым.* Сколько счастливых моментов случается на часах в день с 9:30 до 13:30?

Ответ: 477

Решение. Если секундная стрелка указывает на 12, то счастливым такой момент времени может быть только тогда, когда минутная тоже указывает на 12. Всего таких моментов в указанном диапазоне времени 4. Далее эти моменты времени учитывать не будем.

Секундная и минутная стрелки совпадают один раз каждую минуту, кроме минуты непосредственно до ровного часа, и сразу после. Всего $240 - 4 \cdot 2 = 232$.

Секундная и часовая стрелки совпадают один раз каждую минуту, кроме минуты непосредственно до 12:00, и сразу после. Всего $240 - 2 = 238$.

И наконец, минутная и часовая стрелки совпадают один раз за первые полчаса, за последние полчаса, а также с 10:00 до 11:00. Всего таких моментов 3.

Итого $4 + 232 + 238 + 3 = 477$ счастливых моментов.

Задача 6.4 [вариант 4] На часах с циферблатом три стрелки с плавным ходом: часовая, минутная и секундная. Момент времени, когда положение двух или трёх стрелок совпадает назовём *счастливым.* Сколько счастливых моментов случается на часах в день с 8:30 до 15:30?

Ответ: 837

Решение. Если секундная стрелка указывает на 12, то счастливым такой момент времени может быть только тогда, когда минутная тоже указывает на 12. Всего таких моментов в указанном диапазоне времени 7. Далее эти моменты времени учитывать не будем.

Секундная и минутная стрелки совпадают один раз каждую минуту, кроме минуты непосредственно до ровного часа, и сразу после. Всего $420 - 7 \cdot 2 = 406$.

Секундная и часовая стрелки совпадают один раз каждую минуту, кроме минуты непосредственно до 12:00, и сразу после. Всего $420 - 2 = 418$.

И наконец, минутная и часовая стрелки совпадают один раз за первые полчаса, за последние полчаса, а также каждый час с 9:00 до 11:00 и с 13:00 до 15:00. Всего таких моментов 6.

Итого $7 + 406 + 418 + 6 = 837$ счастливых моментов.

Задача 6.5 [вариант 1] Митя может отмерить любое целое количество грамм от 2000 до 2025 с помощью своего набора гирь, каждая из которых тоже весит целое число грамм. Какое минимальное количество гирь может быть у Мити?

Ответ: 6 гирь

Решение. Для решения можно привести набор гирь весами в 2000, 1, 2, 4, 8 и 16 г. Тогда гири 1, 2, 4, 8, 16 используются для отмера любого веса от 0 до 31. Таким образом, используя дополнительную гирю в 2000 г мы сможем отмерить все необходимые веса.

Докажем, что меньшего количества гирь недостаточно. Предположим, с помощью 5 гирь можно отмерить все необходимые веса. Количество комбинаций из гирь с ненулевым весом $2^5 - 1 = 31$. Каждой комбинации из 5 гирек поставим в соответствие запись вида 11001, где 1 означает, что соответствующая гиря присутствует в комбинации. Тогда, например, среди следующих троек комбинаций (наборы гирь в комбинациях можно прокручиваить по циклу) могут быть использованы максимум две (так как одна из них является суммой двух других, а значит, будет больше, чем $2000 + 2000 > 2025$):

$$\begin{array}{r} \text{5 комб.} \\ + \begin{array}{r} 10000 \\ 01100 \end{array} \\ \hline 11100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{1 комб.} \\ + \begin{array}{r} 10100 \\ 01011 \end{array} \\ \hline 11111 \end{array}$$

Значит, доступных комбинаций уже не более, чем $31 - 6 = 25$, что недостаточно для отмера 26 разных весов от 2000 до 2025.

Задача 6.5 [вариант 2] Митя может отмерить любое целое количество грамм от 2025 до 2040 с помощью своего набора гирь, каждая из которых тоже весит целое число грамм. Какое минимальное количество гирь может быть у Мити?

Ответ: 5 гирь

Решение. Для решения можно привести набор гирь весами в 2025, 1, 2, 4 и 8 г. Тогда гири 1, 2, 4, 8 используются для отмера любого веса от 0 до 15. Таким образом, используя дополнительную гирю в 2025 г мы сможем отмерить все необходимые веса.

Докажем, что меньшего количества гирь недостаточно. Предположим, с помощью 4 гирь можно отмерить все необходимые веса. Количество комбинаций из гирь с ненулевым весом $2^4 - 1 = 15$. Однако, необходимо уметь отмерять 16 различных весов. Значит, такого количества гирь недостаточно.

Задача 6.5 [вариант 3] Митя может отмерить любое целое количество грамм от 2000 до 2050 с помощью своего набора гирь, каждая из которых тоже весит целое число грамм. Какое минимальное количество гирь может быть у Мити?

Ответ: 7 гирь

Решение. Для решения можно привести набор гирь весами в 2000, 1, 2, 4, 8, 16 и 32 г. Тогда гири 1, 2, 4, 8, 16, 32 используются для отмера любого веса от 0 до 63. Таким образом, используя дополнительную гирю в 2000 г мы сможем отмерить все необходимые веса.

Докажем, что меньшего количества гирь недостаточно. Предположим, с помощью 6 гирь можно отмерить все необходимые веса. Количество комбинаций из гирь с ненулевым весом $2^6 - 1 = 63$. Каждой комбинации из 6 гирек поставим в соответствие запись вида 110010, где 1 означает, что соответствующая гиря присутствует в комбинации. Тогда, например, среди следующих троек комбинаций (наборы гирь в комбинация можно прокручиваить по циклу) могут быть использованы максимум две (так как одна из них является суммой двух других, а значит, будет больше, чем $2000 + 2000 > 2050$):

$$\begin{array}{ccc}
\text{6 комб.} & \text{6 комб.} & \text{1 комб.} \\
+\begin{array}{r}100000\\011000\\\hline 111000\end{array} & +\begin{array}{r}101000\\010110\\\hline 111110\end{array} & +\begin{array}{r}101010\\010101\\\hline 111111\end{array}
\end{array}$$

Значит, доступных комбинаций уже не более, чем $63 - 13 = 50$, что недостаточно для отмера 51 разного веса от 2000 до 2050.

Задача 6.5 [вариант 4] Митя может отмерить любое целое количество грамм от 2025 до 2125 с помощью своего набора гирь, каждая из которых тоже весит целое число грамм. Какое минимальное количество гирь может быть у Мити?

Ответ: 8 гирь

Решение. Для решения можно привести набор гирь весами в 2025, 1, 2, 4, 8, 16, 32 и 64 г. Тогда гири 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 используются для отмера любого веса от 0 до 127. Таким образом, используя дополнительную гирю в 2025 г мы сможем отмерить все необходимые веса.

Докажем, что меньшего количества гирь недостаточно. Предположим, с помощью 7 гирь можно отмерить все необходимые веса. Количество комбинаций из гирь с ненулевым весом $2^7 - 1 = 127$. Каждой комбинации из 7 гирек поставим в соответствие запись вида 1100101, где 1 означает, что соответствующая гиря присутствует в комбинации. Тогда, например, среди следующих троек комбинаций (наборы гирь в комбинациях можно прокручиваить по циклу) могут быть использованы максимум две (так как одна из них является суммой двух других, а значит, будет больше, чем $2025 + 2025 > 2125$):

$$\overset{\text{7 комб.}}{+\begin{array}{r}1000000\\0110000\\\hline 1110000\end{array}} \qquad \overset{\text{7 комб.}}{+\begin{array}{r}1010000\\0101100\\\hline 1111100\end{array}} \qquad \overset{\text{7 комб.}}{+\begin{array}{r}1001000\\0110010\\\hline 1111010\end{array}} \qquad \overset{\text{7 комб.}}{+\begin{array}{r}1010100\\0101010\\\hline 1111110\end{array}}$$

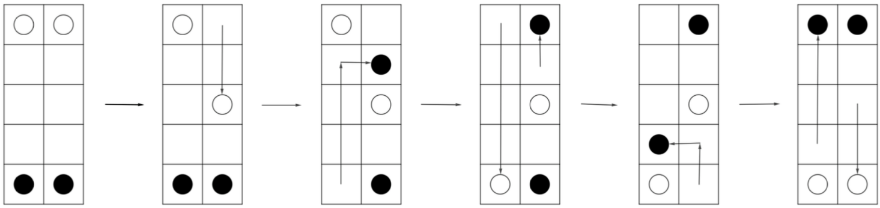
Значит, доступных комбинаций уже не более, чем $127 - 28 = 99$, что недостаточно для отмера 101 разного веса от 2025 до 2125.

Задача 6.6 [вариант 1] Дана доска размером 5×8 (5 строк и 8 столбцов). В верхней строке стоят белые фишки, а в нижней — чёрные. За один ход разрешается передвинуть любую фишку на пустую клетку, соседнюю по стороне с ней. За какое наименьшее количество ходов удастся поменять белые и чёрные фишки местами?

Ответ: 72

Решение. Заметим, что каждая фишка должна сделать не менее 4 ходов по вертикали. Кроме того, не менее половины фишек должны сделать хотя бы 1 ход по горизонтали, ведь в противном случае найдется столбец, в котором обе фишки не сделают ход по горизонтали, а потому не смогут разминуться. Поэтому всего потребуется не менее $4 \cdot (8+8)+8 = 72$ хода.

Разделим доску на 4 полоски размера 5×2. Покажем, как в полоске 5×2 за 18 ходов поменять фишки местами, тогда, поменяв фишки в каждой из четырех полосок, мы получим требуемую последовательность ходов для всей доски. Последовательность необходимых ходов изображена на рисунке ниже.



Задача 6.6 [вариант 2] Дана доска размером 5×10 (5 строк и 10 столбцов). В верхней строке стоят белые фишки, а в нижней — чёрные. За один ход разрешается передвинуть любую фишку на пустую клетку, соседнюю по стороне с ней. За какое наименьшее количество ходов удастся поменять белые и чёрные фишки местами?

Ответ: 90

Задача 6.6 [вариант 3] Дана доска размером 5×12 (5 строк и 12 столбцов). В верхней строке стоят белые фишки, а в нижней — чёрные. За один ход разрешается передвинуть любую фишку на пустую клетку, соседнюю по стороне с ней. За какое наименьшее количество ходов удастся поменять белые и чёрные фишки местами?

Ответ: 108

Задача 6.6 [вариант 4] Дана доска размером 5×14 (5 строк и 14 столбцов). В верхней строке стоят белые фишки, а в нижней — чёрные. За один ход разрешается передвинуть любую фишку на пустую клетку, соседнюю по стороне с ней. За какое наименьшее количество ходов удастся поменять белые и чёрные фишки местами?

Ответ: 126