10 КЛАСС. Вариант 5

1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x+3$, пятый член равен $(x^2+2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x.

Ответ: $x=-1$, $x=-1\pm\sqrt{3}$.

Решение. Числа A, B, C являются третьим, пятым и девятым членами арифметической прогрессии соответственно тогда и только тогда, когда они удовлетворяют соотношению $3B=2A+C$ ($a_5=a_3+2d$, $a_9=a_3+6d$). Таким образом, задача сводится к решению уравнения $3\left(x^2+2x\right)^2=$ $=3x^2+2(3x+3)$. Сделав замену $t=x^2+2x$, получаем $3t^2=3t+6\Leftrightarrow t^2-t-2=0$. Данное уравнение имеет корни $t=-1$ и $t=2$. Далее находим значения x:

$$\left[\begin{array}{l}x^2+2x+1=0,\\ x^2+2x-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=-1\pm\sqrt{3}.\end{array}\right.$$

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y+8x$ при условии $\begin{cases}|x-3y|\leqslant 3,\\ |3x-y|\leqslant 1.\end{cases}$

Ответ: 11.

Решение. Данная система неравенств эквивалентна следующим:

$$\begin{cases}-3\leqslant x-3y\leqslant 3,\\ -1\leqslant 3x-y\leqslant 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x}{3}-1\leqslant y\leqslant\frac{x}{3}+1,\\ 3x-1\leqslant y\leqslant 3x+1.\end{cases}$$

Первое неравенство задаёт полосу между параллельными прямыми $y=\frac{x}{3}-1$ и $y=\frac{x}{3}+1$, а второе – полосу между прямыми $y=3x-1$ и $y=3x+1$. Их пересечением является параллелограмм с вершинами в точках $P(0;-1)$, $Q\left(-\frac{3}{4};-\frac{5}{4}\right)$, $R(0;1)$, $S\left(\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right)$ (координаты вершин можно найти, решив соответствующие системы линейных уравнений).
Рассмотрим уравнение $4y+8x=C$, где C – некоторая константа. Оно задаёт прямую на плоскости, причём в любой точке прямой значение выражения $4y+8x$ постоянно и равно C. Если изменить значение C, получится некоторая другая прямая, на которой выражение $4y+8x$ принимает новое значение. Нам необходимо определить максимальное значение C, при котором прямая $4y+8x=C$ пересекает параллелограмм. Несложно видеть, что при увеличении C прямая движется вверх на плоскости, и самое большое C получается, когда прямая проходит через точку S. Это значение равно $4\cdot\frac{3}{4}+8\cdot\frac{5}{4}=11$.

3. [5 баллов] Найдите все пары (m,n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A=m^2+$ $+2mn+n^2-9m-9n$ и $B=m^2n+mn^2-3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.

Ответ: $(3;10)$, $(10;3)$.

Решение. Число A представимо в виде $A=(m+n)(m+n-9)$. Так как множители имеют разную чётность, A – чётное число. Рассмотрим два случая.
- Если $A=75q^2$, то так как A чётное, q также должно быть чётным. Кроме того, q – простое число, следовательно, $q=2$. Отсюда получаем $(m+n)^2-9(m+n)-300=0$. Это уравнение является квадратным относительно $m+n$ и не имеет натуральных корней. Значит, первый случай невозможен.
- Следовательно, $A=13p^2$, и тогда по условию $B=75q^2$. Рассуждая аналогично, получаем, что

$p = 2$. Тогда $(m+n)^2 - 9(m+n) - 52 = 0$, откуда $m+n = -4$ или $m+n = 13$. Подходит только $m+n = 13$, так как числа m и n положительны. Перейдём ко второму равенству

$$mn(m+n) - 3mn = 75q^2.$$

Так как $m+n = 13$, оно упрощается и принимает вид $2mn = 15q^2$. Отсюда q – чётное число, поэтому $q = 2$. Итак, числа m и n удовлетворяют системе

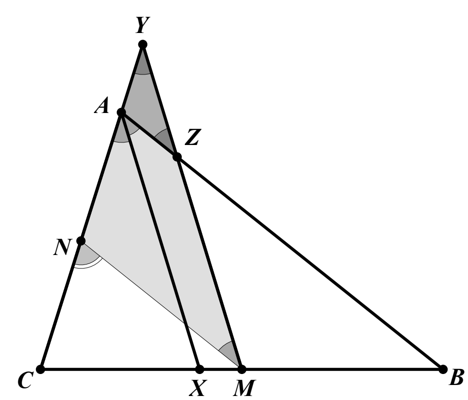
$$\begin{cases} m+n = 13, \\ mn = 30. \end{cases}$$

Её решениями являются пары чисел $(3;10)$, $(10;3)$.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC, проходящая через середину M его стороны BC, пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC, если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.

Ответ: $BC = 8\sqrt{21}$.

Решение. Обозначим $\angle BAC = 2\alpha$. Тогда $\angle BAX = \angle CAX = \alpha$; за счёт параллельности AX и MY получаем $\angle AYZ = \angle CAX = \alpha$, $\angle AZY = \angle BAX = \alpha$. Пусть MN – средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне AB. Тогда $\angle NMY = \angle AZY = \alpha$. В треугольниках MNY и AZY есть по два угла, равных α. Значит, они оба равнобедренные и подобны друг другу. Из треугольника AYZ находим, что $\cos\alpha = \frac{YZ}{2\cdot AZ} = \frac{2}{3}$.



Заметим также, что $\angle CNM = 2\alpha$ (внешний угол треугольника MNY), $CN = \frac{1}{2}AC = 9$; $MN = NY = AN + AY = \frac{AC}{2} + AZ = 15$. Кроме того, $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = -\frac{1}{9}$. По теореме косинусов для треугольника MNC получаем

$$MC^2 = MN^2 + CN^2 - 2MN \cdot CN \cdot \cos 2\alpha = 336.$$

Отсюда $BC = 2MC = 8\sqrt{21}$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}; \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)$.

Решение. Запишем второе уравнение системы в виде $x^4+5x^2+\sqrt{x} = y^4+5y^2+\sqrt{y}$. Введя функцию $f(t) = t^4 + 5t^2 + \sqrt{t}$, можем переписать это уравнение в виде $f(x) = f(y)$. Функция f строго

возрастает на всей своей области определения (как сумма трёх возрастающих при $t \geqslant 0$ функций). Отсюда следует, что каждое своё значение она принимает один-единственный раз. Значит, $y = x$. Подставляя y в первое уравнение, получаем

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}.$$

Обозначим $t = \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x}$. Возводя обе части в квадрат, получаем $t^2 = x+1-2\sqrt{(x+1)(6-x)}+$ $+6-x$, откуда $2\sqrt{6+5x-x^2} = 7-t^2$. Уравнение принимает вид $t+5 = 7-t^2$. Решая его, находим $t = -2$ или $t = 1$. Если $t = 1$, то

$$\sqrt{6-x}+1 = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow 6-x+2\sqrt{6-x}+1 = x+1 \Leftrightarrow \sqrt{6-x} = x-3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6-x = (x-3)^2, \\ x-3 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pm\sqrt{13}}{2}, \\ x \geqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5+\sqrt{13}}{2}.$$

Если $t = -2$, то $\sqrt{x+1}+2 = \sqrt{6-x}$. Левая часть этого уравнения – возрастающая функция, а правая – убывающая. Из второго уравнения следует, что $x \geqslant 0$. Значит, минимальное значение левой части равно $\sqrt{1}+2$, а максимальное значение правой есть $\sqrt{6}$ (оба значения принимаются при $x = 0$). Следовательно, в этом случае решений нет. (Разумеется, можно было решить это уравнение аналогично предыдущему, но мы бы получили корень $x < 0$, не удовлетворяющий системе.) Итак, система имеет единственное решение $\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}; \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)$.

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

Ответ: 820.

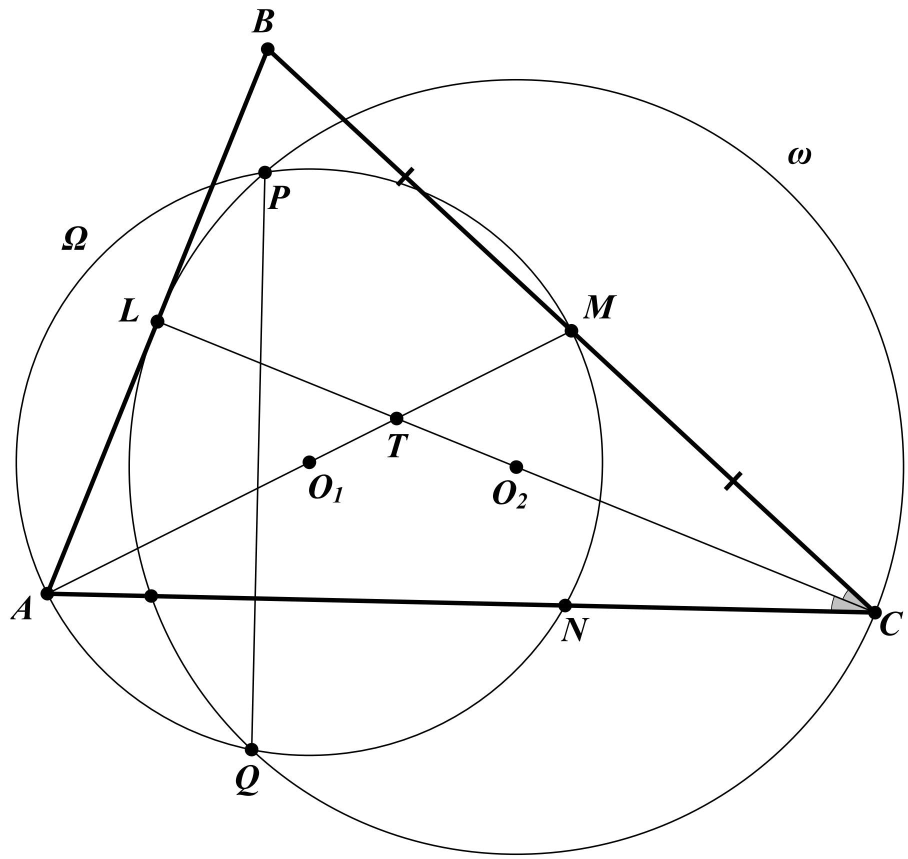
Решение. Зафиксируем положение квадрата (временно запретим повороты) и перекрасим два его узла. Возможны два случая.

- В белый цвет покрашены два узла, симметричных относительно центра квадрата.
- В белый цвет покрашены два узла, не симметричных относительно центра.

В первом случае раскраска переходит сама в себя при повороте на $180°$, но не на $90°$ т. е. все такие раскраски разбиваются на пары считающихся одинаковыми. Во втором же случае совмещение с самой собой при поворотах на $90°$, $180°$ и $270°$ не происходит, поэтому любая такая раскраска совмещается с четырьмя другими раскрасками, а всё множество раскрасок во втором случае разбивается на четвёрки считающихся одинаковыми.
В первом случае количество раскрасок равно $\frac{81-1}{2}$, поскольку достаточно выбрать лишь один узел, не являющийся центральным, и тогда симметричный ему узел определён однозначно. Во втором случае можно брать любые из C_{81}^2 пар узлов, кроме относящихся к первому случаю, т. е. $C_{81}^2 - \frac{81-1}{2}$.
В итоге получаем, что количество раскрасок равно $\frac{1}{4}\left(C_{81}^2 - \frac{81-1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{81-1}{2}\right) = 820$.

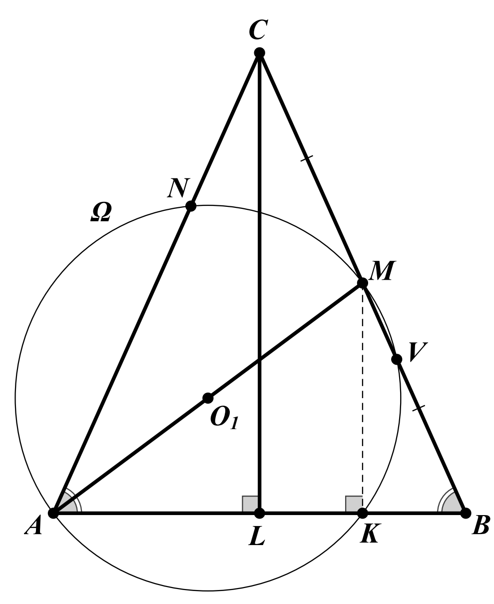
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q. Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC, проведённой из вершины B. Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N. Найдите длины сторон AC и BC, если $AB = 10$, $AN = 8$.

Ответ: $AC = BC = 8+\sqrt{14}$.



Решение. Пусть T – точка пересечения AM и CL, O_1 и O_2 – середины этих отрезков соответственно. Тогда $O_1O_2 \perp PQ$, откуда $AC \parallel O_1O_2$. Треугольники TO_1O_2 и TAC подобны по двум углам. Обозначим $TO_1 = x$, $TO_2 = y$, $k = \frac{AO_1}{TO_1}$. Тогда $TA = (k+1)x$, $TC = (k+1)y$. Поскольку O_1 и O_2 – середины AM и CL, $MT = AO_1 - TO_1 = (k-1)x$, $LT = CO_2 - TO_2 = (k-1)y$, а значит, $LT : TC = MT : TA$, и треугольники LMT и CAT подобны, откуда $LM \parallel AC$. Следовательно, L – середина стороны AB, отрезок CL является в треугольнике ABC медианой и биссектрисой, поэтому треугольник равнобедренный ($AC = BC$).

Пусть окружность Ω пересекает сторону AB в точке K, а сторону BC вторично пересекает в точке V. Угол MKA прямой, поскольку AM – диаметр окружности, поэтому MK – средняя линия треугольника CBL. Отсюда $BK = \frac{AB}{4} = \frac{5}{2}$. Пусть $CM = c$, $VM = t$. Тогда $CA = CB = 2c$, и по теореме о двух секущих получаем



$$CM \cdot CV = CN \cdot CA \;\Leftrightarrow\; (c+t)\cdot c = (2c-8)\cdot 2c;$$

$$BM \cdot BV = BK \cdot BA \;\Leftrightarrow\; (c-t)\cdot c = \frac{5}{2}\cdot 10.$$

Из первого равенства следует, что $t = 3c - 16$. Подставляя во второе равенство, имеем $(16-2c)\cdot c = 25 \Leftrightarrow c = \frac{8\pm\sqrt{14}}{2}$. Отсюда $BC = AC = 2c = 8\pm\sqrt{14}$. Но так как $AC > AN = 8$, подходит только $BC = AC = 8+\sqrt{14}$.

10 КЛАСС. Вариант 6

1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен $12-12x$, четвёртый член равен $\left(x^2+4x\right)^2$, а восьмой равен $(-6x^2)$. Найдите x.

   Ответ: $x=-2$, $x=-2\pm\sqrt{6}$.

   Решение. Числа A, B, C являются вторым, четвёртым и восьмым членами арифметической прогрессии соответственно тогда и только тогда, когда они удовлетворяют соотношению $3B=2A+C$ ($a_4=a_2+2d$, $a_8=a_2+6d$). Таким образом, задача сводится к решению уравнения $3\left(x^2+4x\right)^2=-6x^2+2(12-12x)$. Сделав замену $t=x^2-4x$, получаем $3t^2=-6t+24 \Leftrightarrow t^2+2t-8=0$. Данное уравнение имеет корни $t=-4$ и $t=2$. Далее находим значения x:

$$\left[\begin{aligned}&x^2+4x+4=0,\\&x^2+4x-2=0\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&x=-2,\\&x=-2\pm\sqrt{6}.\end{aligned}\right.$$

2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $10x+5y$ при условии $\begin{cases}|2x-3y|\leqslant 6,\\|3x-2y|\leqslant 4.\end{cases}$

   Ответ: -74.

   Решение. Данная система неравенств эквивалентна следующим:

$$\begin{cases}-6\leqslant 2x-3y\leqslant 6,\\-4\leqslant 3x-2y\leqslant 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{2x}{3}-2\leqslant y\leqslant\frac{2x}{3}+2,\\\frac{3x}{2}-2\leqslant y\leqslant\frac{3x}{2}+2.\end{cases}$$

   Первое неравенство задаёт полосу между параллельными прямыми $y=\frac{2x}{3}-2$ и $y=\frac{2x}{3}+2$, а второе – полосу между прямыми $y=\frac{3x}{2}-2$ и $y=\frac{3x}{2}+2$. Их пересечением является параллелограмм с вершинами в точках $P(0;-2)$, $Q\left(-\frac{24}{5};-\frac{26}{5}\right)$, $R(0;2)$, $S\left(\frac{24}{5};\frac{26}{5}\right)$ (координаты вершин можно найти, решив соответствующие системы линейных уравнений).
   Рассмотрим уравнение $10x+5y=C$, где C – некоторая константа. Оно задаёт прямую на плоскости, причём в любой точке прямой значение выражения $10x+5y$ постоянно и равно C. Если изменить значение C, получится некоторая другая прямая, на которой выражение $10x+5y$ принимает новое значение. Нам необходимо определить минимальное значение C, при котором прямая $10x+5y=C$ пересекает параллелограмм. Несложно видеть, что при увеличении C прямая движется вверх на плоскости, и самое маленькое C получается, когда прямая проходит через точку Q. Это значение равно $10\cdot\left(-\frac{24}{5}\right)+5\cdot\left(-\frac{26}{5}\right)=-74$.

3. [5 баллов] Найдите все пары (m,n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A=m^2-4mn+{}+4n^2+13m-26n$ и $B=m^2n-2mn^2-2mn$ равно $17p^2$, а другое равно $15q^2$, где p и q – простые числа.

   Ответ: $(10;3)$.

   Решение. Число A представимо в виде $A=(m-2n)(m-2n+13)$. Так как множители имеют разную чётность, A – чётное число. Рассмотрим два случая.
   Если $A=15q^2$, то так как A чётное, q также должно быть чётным. Кроме того, q – простое число, следовательно, $q=2$. Отсюда получаем $(m-2n)^2+13(m-2n)-60=0$. Это уравнение является квадратным относительно $m-2n$ и не имеет натуральных корней. Значит, первый случай невозможен.
   Следовательно, $A=17p^2$, и тогда по условию $B=15q^2$. Рассуждая аналогично, получаем, что

$p = 2$. Тогда $(m-2n)^2 + 13(m-2n) - 68 = 0$, откуда $m - 2n = -17$ или $m - n = 4$. Перейдём ко второму равенству

$$mn(m-2n) - 2mn = 15q^2.$$

Если $m - 2n = -17$, то $-19mn = 15q^2$, что невозможно, так как левая часть отрицательна, а правая – положительна. Если $m - 2n = 4$, то $2mn = 15q^2$. Отсюда $q = 2$ (так как q – простое). Итак, числа m и n удовлетворяют системе

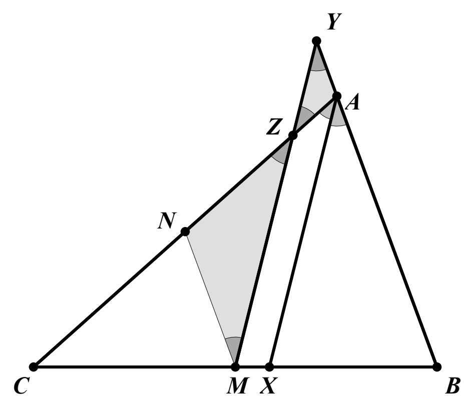
$$\begin{cases} m - n = 4, \\ mn = 30. \end{cases}$$

Её решениями являются пары чисел $(10; 3)$, $(-6; -5)$. Так как m и n натуральные, подходит только первая из этих двух пар.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC, проходящая через середину M его стороны BC, пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC, если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.

Ответ: $BC = 8\sqrt{6}$.

Решение. Обозначим $\angle BAC = 2\alpha$. Тогда $\angle BAX = \angle CAX = \alpha$; за счёт параллельности AX и MY получаем $\angle AYZ = \angle BAX = \alpha$, $\angle AZY = \angle CAX = \alpha$. Пусть MN – средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне AB. Тогда $\angle NMY = \angle BYM = \alpha$. В треугольниках MNZ и AZY есть по два угла, равных α. Значит, они оба равнобедренные и подобны друг другу. Из треугольника AYZ находим, что $\cos\alpha = \frac{YZ}{2\cdot AZ} = \frac{2}{3}$.



Заметим также, что $\angle CNM = 2\alpha$ (внешний угол треугольника MNZ), $CN = \frac{1}{2}AC = 9$; $MN = NZ = AN - AZ = \frac{AC}{2} - AZ = 3$. Кроме того, $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = -\frac{1}{9}$. По теореме косинусов для треугольника MNC получаем

$$MC^2 = MN^2 + CN^2 - 2MN\cdot CN\cdot\cos 2\alpha = 96.$$

Отсюда $BC = 2MC = 8\sqrt{6}$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12 - x - y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x} + 4y^2. \end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{13}-1}{2}; \frac{\sqrt{13}-1}{2}\right)$.

Решение. Запишем второе уравнение системы в виде $2x^5 + 4x^2 + \sqrt[4]{3x} = 2y^5 + 4y^2 + \sqrt[4]{3y}$. Введя функцию $f(t) = 2t^5 + 4t^2 + \sqrt[4]{3t}$, можем переписать это уравнение в виде $f(x) = f(y)$. Функция

f строго возрастает на всей своей области определения (как сумма трёх возрастающих при $t \geqslant 0$ функций). Отсюда следует, что каждое своё значение она принимает один-единственный раз. Значит, $y = x$. Подставляя y в первое уравнение, получаем

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12 - x - x^2}.$$

Обозначим $t = \sqrt{x+4} - \sqrt{3-x}$. Возводя обе части в квадрат, получаем $t^2 = x+4-2\sqrt{(x+4)(3-x)}+$ $+3-x$, откуда $2\sqrt{12-x-x^2} = 7-t^2$. Уравнение принимает вид $t+5 = 7-t^2$. Решая его, находим $t = -2$ или $t = 1$. Если $t = 1$, то

$$\sqrt{3-x} + 1 = \sqrt{x+4} \Leftrightarrow 3 - x + 2\sqrt{3-x} + 1 = x + 4 \Leftrightarrow \sqrt{3-x} = x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x = x^2, \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}, \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{13}-1}{2}.$$

Если $t = -2$, то $\sqrt{x+4} + 2 = \sqrt{3-x}$. Левая часть этого уравнения – возрастающая функция, а правая – убывающая. Из второго уравнения следует, что $x \geqslant 0$. Значит, минимальное значение левой части равно $\sqrt{4}+2$, а максимальное значение правой есть $\sqrt{3}$ (оба значения принимаются при $x = 0$). Следовательно, в этом случае решений нет. (Разумеется, можно было решить это уравнение аналогично предыдущему, но мы бы получили корень $x < 0$, не удовлетворяющий системе.) Итак, система имеет единственное решение $\left(\frac{\sqrt{13}-1}{2}; \frac{\sqrt{13}-1}{2}\right)$.

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 7×7 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

   Ответ: 512.

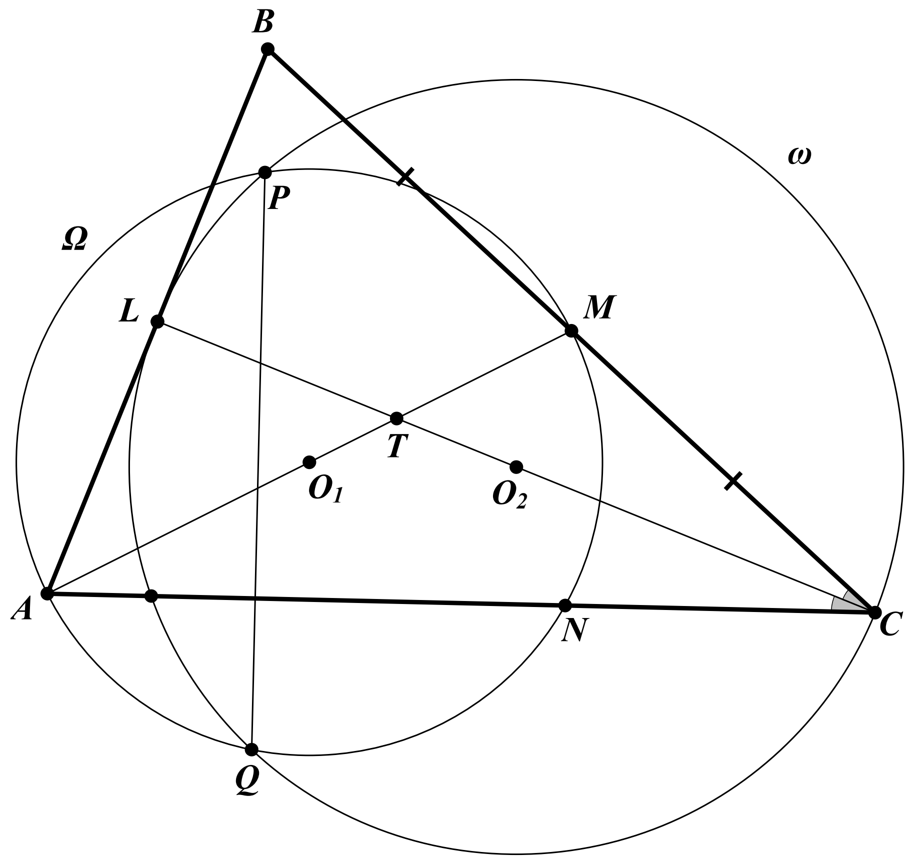
   Решение. Зафиксируем положение квадрата (временно запретим повороты) и перекрасим два его узла. Возможны два случая.

   - В белый цвет покрашены два узла, симметричных относительно центра квадрата.
   - В белый цвет покрашены два узла, не симметричных относительно центра.

   В первом случае раскраска переходит сама в себя при повороте на 180°, но не на 90° т. е. все такие раскраски разбиваются на пары считающихся одинаковыми. Во втором случае совмещение с самой собой при поворотах на 90°, 180° и 270° не происходит, поэтому любая такая раскраска совмещается с четырьмя другими раскрасками, а всё множество раскрасок во втором случае разбивается на четвёрки считающихся одинаковыми.
   В первом случае количество раскрасок равно $\frac{64}{2}$, поскольку достаточно выбрать лишь один узел, и тогда симметричный ему узел определён однозначно. Во втором случае можно брать любые из C_{64}^2 пар узлов, кроме относящихся к первому случаю, т. е. $C_{64}^2 - \frac{64}{2}$. В итоге получаем, что количество раскрасок равно $\frac{1}{4}\cdot\left(C_{64}^2 - \frac{64}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{64}{2} = 512$.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q. Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC, проведённой из вершины B. Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N. Найдите длины сторон AC и BC, если $AB = 6$, $AN = 5$.

   Ответ: $AC = BC = 5 + \sqrt{7}$.



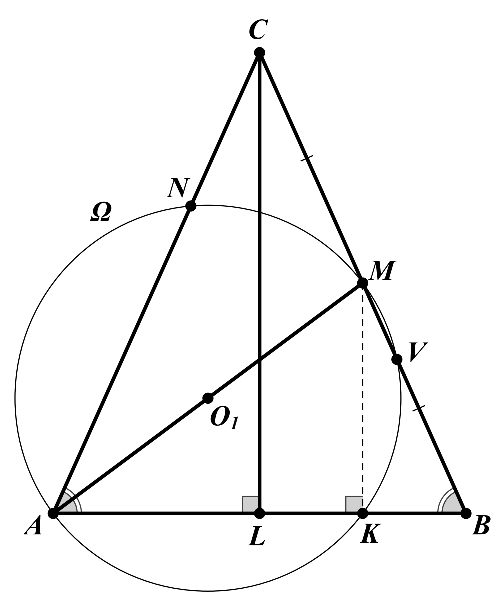
Решение. Пусть T – точка пересечения AM и CL, O_1 и O_2 – середины этих отрезков соответственно. Тогда $O_1O_2 \perp PQ$, откуда $AC \parallel O_1O_2$. Треугольники TO_1O_2 и TAC подобны по двум углам. Обозначим $TO_1 = x$, $TO_2 = y$, $k = \frac{AO_1}{TO_1}$. Тогда $TA = (k+1)x$, $TC = (k+1)y$. Поскольку O_1 и O_2 – середины AM и CL, $MT = AO_1 - TO_1 = (k-1)x$, $LT = CO_2 - TO_2 = (k-1)y$, а значит, $LT : TC = MT : TA$, и треугольники LMT и CAT подобны, откуда $LM \parallel AC$. Следовательно, L – середина стороны AB, отрезок CL является в треугольнике ABC медианой и биссектрисой, поэтому треугольник равнобедренный ($AC = BC$).

Пусть окружность Ω пересекает сторону AB в точке K, а сторону BC вторично пересекает в точке V. Угол MKA прямой, поскольку AM – диаметр окружности, поэтому MK – средняя линия треугольника CBL. Отсюда $BK = \frac{AB}{4} = \frac{3}{2}$. Пусть $CM = c$, $VM = t$. Тогда $CA = CB = 2c$, и по теореме о двух секущих получаем

$$CM \cdot CV = CN \cdot CA \;\Leftrightarrow\; (c+t)\cdot c = (2c-5)\cdot 2c;$$

$$BM \cdot BV = BK \cdot BA \;\Leftrightarrow\; (c-t)\cdot c = \frac{3}{2}\cdot 6.$$

Из первого равенства следует, что $t = 3c - 16$. Подставляя во второе равенство, имеем $(10-2c)\cdot c = 9 \Leftrightarrow c = \frac{5\pm\sqrt{7}}{2}$. Отсюда $BC = AC = 2c = 5 \pm \sqrt{7}$. Но так как $AC > AN = 5$, подходит только $BC = AC = 5 + \sqrt{7}$.



10 КЛАСС. Вариант 7

1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6-9x$, шестой член равен $\left(x^2-2x\right)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x.

Ответ: $x=1$, $x=1\pm\sqrt{5}$.

Решение. Числа A, B, C являются четвёртым, шестым и десятым членами арифметической прогрессии соответственно тогда и только тогда, когда они удовлетворяют соотношению $3B=2A+C$ ($a_6=a_4+2d$, $a_{10}=a_4+6d$). Таким образом, задача сводится к решению уравнения $3\left(x^2-2x\right)^2=9x^2+2(6-9x)$. Сделав замену $t=x^2-2x$, получаем $3t^2=9t+12\Leftrightarrow t^2-3t-4=0$. Данное уравнение имеет корни $t=4$ и $t=-1$. Далее находим значения x:

$$\left[\begin{array}{l} x^2-2x-4=0, \\ x^2-2x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=1\pm\sqrt{5}. \end{array}\right.$$

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y+6x$ при условии $\begin{cases}|x-2y|\leqslant 2 \\ |2x-y|\leqslant 1.\end{cases}$

Ответ: 13.

Решение. Данная система неравенств эквивалентна следующим:

$$\begin{cases}-2\leqslant x-2y\leqslant 2, \\ -1\leqslant x-2y\leqslant 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x}{2}-1\leqslant y\leqslant\frac{x}{2}+1, \\ 2x-1\leqslant y\leqslant 2x+1.\end{cases}$$

Первое неравенство задаёт полосу между параллельными прямыми $y=\frac{x}{2}-1$ и $y=\frac{x}{2}+1$, а второе – полосу между прямыми $y=2x-1$ и $y=2x+1$. Их пересечением является параллелограмм с вершинами в точках $P(0;-1)$, $Q\left(-\frac{4}{3};-\frac{5}{3}\right)$, $R(0;1)$, $S\left(\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)$ (координаты вершин можно найти, решив соответствующие системы линейных уравнений).
Рассмотрим уравнение $3y+6x=C$, где C – некоторая константа. Оно задаёт прямую на плоскости, причём в любой точке прямой значение выражения $3y+6x$ постоянно и равно C. Если изменить значение C, получится некоторая другая прямая, на которой выражение $3y+6x$ принимает новое значение. Нам необходимо определить максимальное значение C, при котором прямая $3y+6x=C$ пересекает параллелограмм. Несложно видеть, что при увеличении C прямая движется вверх на плоскости, и самое большое C получается, когда прямая проходит через точку S. Это значение равно $3\cdot\frac{5}{3}+6\cdot\frac{4}{3}=13$.

3. [5 баллов] Найдите все пары (m,n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A=m^2+4mn+ +4n^2-7m-14n$ и $B=m^2n+2mn^2+9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.

Ответ: $(5;3)$.

Решение. Число A представимо в виде $A=(m+2n)(m+2n-7)$. Так как множители имеют разную чётность, A – чётное число. Рассмотрим два случая.
Если $A=75q^2$, то так как A чётное, q также должно быть чётным. Кроме того, q – простое число, следовательно, $q=2$. Отсюда получаем $(m+2n)^2-7(m+2n)-300=0$. Это уравнение является квадратным относительно $m+2n$ и не имеет натуральных корней. Значит, первый случай невозможен.
Следовательно, $A=11p^2$, и тогда по условию $B=75q^2$. Рассуждая аналогично, получаем, что

$p=2$. Тогда $(m+2n)^2-7(m+2n)-44=0$, откуда $m+2n=-4$ или $m+2n=11$. Подходит только $m+2n=11$, так как числа m и n положительны. Перейдём ко второму равенству

$$mn(m+2n)+9mn=75q^2.$$

Так как $m+2n=11$, оно упрощается и принимает вид $4mn=15q^2$. Отсюда q – чётное число, поэтому $q=2$. Итак, числа m и n удовлетворяют системе

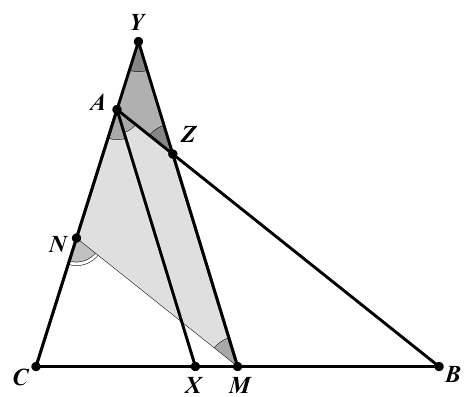
$$\begin{cases} m+2n=11, \\ mn=15. \end{cases}$$

Её решениями являются пары чисел $(5;3)$, $\left(6;\frac{5}{2}\right)$. Так как m и n натуральные, подходит только первая из этих двух пар.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC, проходящая через середину M его стороны BC, пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC, если $AC=6$, $AZ=3$, $YZ=4$.

   Ответ: $BC=14$.

   Решение. Обозначим $\angle BAC=2\alpha$. Тогда $\angle BAX=\angle CAX=\alpha$; за счёт параллельности AX и MY получаем $\angle AYZ=\angle CAX=\alpha$, $\angle AZY=\angle BAX=\alpha$. Пусть MN – средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне AB. Тогда $\angle NMY=\angle AZY=\alpha$. В треугольниках MNY и AZY есть по два угла, равных α. Значит, они оба равнобедренные и подобны друг другу. Из треугольника AYZ находим, что $\cos\alpha=\frac{YZ}{2\cdot AZ}=\frac{2}{3}$.



   Заметим также, что $\angle CNM=2\alpha$ (внешний угол треугольника MNY), $CN=\frac{1}{2}AC=3$; $MN=NY=AN+AY=\frac{AC}{2}+AZ=6$. Кроме того, $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=-\frac{1}{9}$. По теореме косинусов для треугольника MNC получаем

$$MC^2=MN^2+CN^2-2MN\cdot CN\cdot\cos 2\alpha=49.$$

   Отсюда $BC=2MC=14$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x+2}-\sqrt{7-y}+7=2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3+3x-\sqrt{2y}=y^3-\sqrt{2x}+3y. \end{cases}$

   Ответ: $\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2};\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)$.

   Решение. Запишем второе уравнение системы в виде $x^3+3x+\sqrt{2x}=y^3+3y+\sqrt{2y}$. Введя функцию $f(t)=t^3+3t+\sqrt{2t}$, можем переписать это уравнение в виде $f(x)=f(y)$. Функция f строго

возрастает на всей своей области определения (как сумма трёх возрастающих при $t \geqslant 0$ функций). Отсюда следует, что каждое своё значение она принимает один-единственный раз. Значит, $y = x$. Подставляя y в первое уравнение, получаем

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2}.$$

Обозначим $t = \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x}$. Возводя обе части в квадрат, получаем $t^2 = x+2-2\sqrt{(x+2)(7-x)}+ +7-x$, откуда $2\sqrt{14+5x-x^2} = 9-t^2$. Уравнение принимает вид $t+7 = 9-t^2$. Решая его, находим $t = -2$ или $t = 1$. Если $t = 1$, то

$$\sqrt{7-x}+1 = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow 7-x+2\sqrt{7-x}+1 = x+2 \Leftrightarrow \sqrt{7-x} = x-3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7-x = (x-3)^2, \\ x-3 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pm\sqrt{17}}{2}, \\ x \geqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5+\sqrt{17}}{2}.$$

Если $t = -2$, то $\sqrt{x+2}+2 = \sqrt{7-x}$. Левая часть этого уравнения – возрастающая функция, а правая – убывающая. Из второго уравнения следует, что $x \geqslant 0$. Значит, минимальное значение левой части равно $\sqrt{2}+2$, а максимальное значение правой есть $\sqrt{7}$ (оба значения принимаются при $x = 0$). Следовательно, в этом случае решений нет. (Разумеется, можно было решить это уравнение аналогично предыдущему, но мы бы получили корень $x < 0$, не удовлетворяющий системе.) Итак, система имеет единственное решение $\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2}; \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)$.

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

Ответ: 1 830.

Решение. Зафиксируем положение квадрата (временно запретим повороты) и перекрасим два его узла. Возможны два случая.

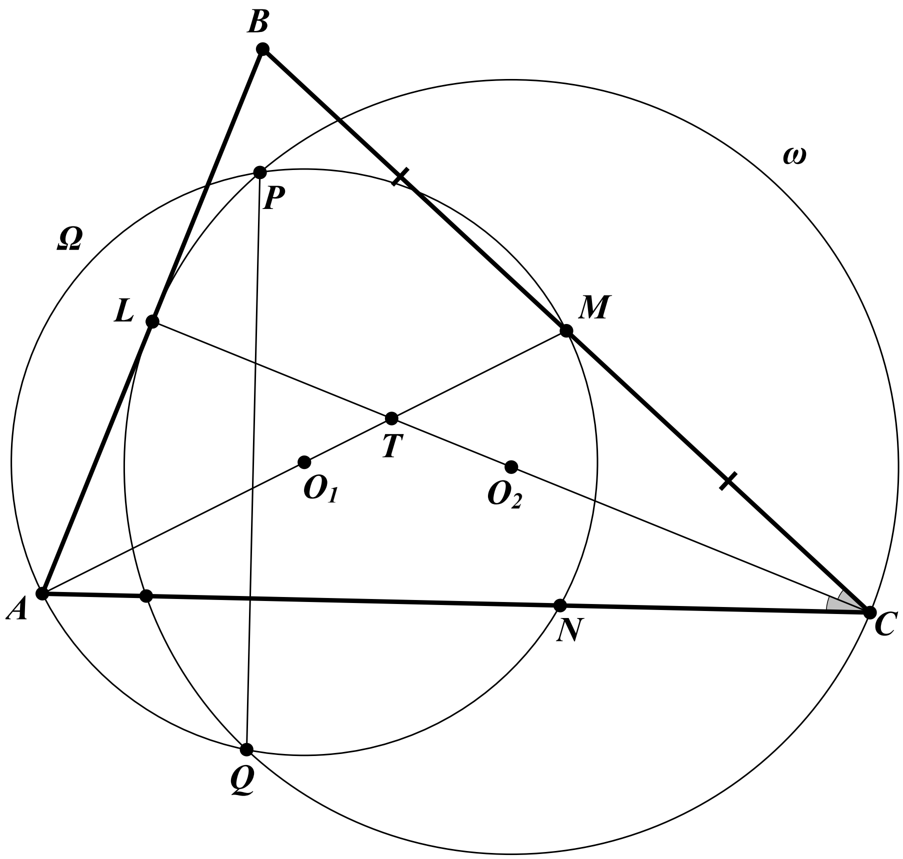
- В белый цвет покрашены два узла, симметричных относительно центра квадрата.
- В белый цвет покрашены два узла, не симметричных относительно центра.

В первом случае раскраска переходит сама в себя при повороте на $180°$, но не на $90°$ т. е. все такие раскраски разбиваются на пары считающихся одинаковыми. Во втором же случае совмещение с самой собой при поворотах на $90°$, $180°$ и $270°$ не происходит, поэтому любая такая раскраска совмещается с четырьмя другими раскрасками, а всё множество раскрасок во втором случае разбивается на четвёрки считающихся одинаковыми.

В первом случае количество раскрасок равно $\frac{121-1}{2}$, поскольку достаточно выбрать лишь один узел, не являющийся центральным, и тогда симметричный ему узел определён однозначно. Во втором случае можно брать любые из C_{121}^2 пар узлов, кроме относящихся к первому случаю, т. е. $C_{121}^2 - \frac{121-1}{2}$. В итоге получаем, что количество раскрасок равно $\frac{1}{4}\left(C_{121}^2 - \frac{121-1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{121-1}{2}\right) = 1\,830$.

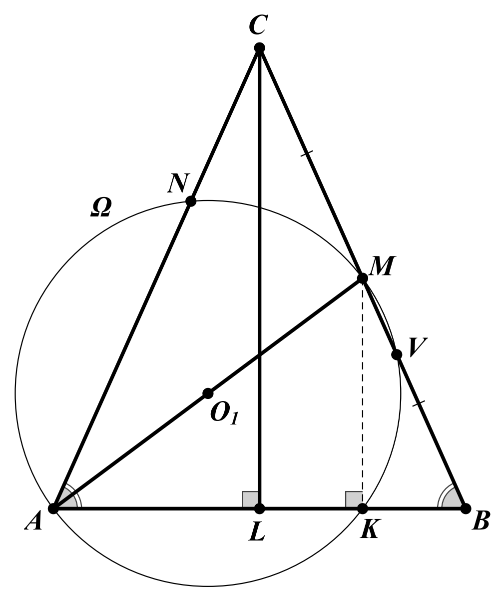
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q. Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC, проведённой из вершины B. Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N. Найдите длины сторон AC и BC, если $AB = 4$, $AN = 5$.

Ответ: $AC = BC = 5 + \sqrt{17}$.



Решение. Пусть T – точка пересечения AM и CL, O_1 и O_2 – середины этих отрезков соответственно. Тогда $O_1O_2 \perp PQ$, откуда $AC \parallel O_1O_2$. Треугольники TO_1O_2 и TAC подобны по двум углам. Обозначим $TO_1 = x$, $TO_2 = y$, $k = \frac{AO_1}{TO_1}$. Тогда $TA = (k+1)x$, $TC = (k+1)y$. Поскольку O_1 и O_2 – середины AM и CL, $MT = AO_1 - TO_1 = (k-1)x$, $LT = CO_2 - TO_2 = (k-1)y$, а значит, $LT : TC = MT : TA$, и треугольники LMT и CAT подобны, откуда $LM \parallel AC$. Следовательно, L – середина стороны AB, отрезок CL является в треугольнике ABC медианой и биссектрисой, поэтому треугольник равнобедренный ($AC = BC$).

Пусть окружность Ω пересекает сторону AB в точке K, а сторону BC вторично пересекает в точке V. Угол MKA прямой, поскольку AM – диаметр окружности, поэтому MK – средняя линия треугольника CBL. Отсюда $BK = \frac{AB}{4} = 1$. Пусть $CM = c$, $VM = t$. Тогда $CA = CB = 2c$, и по теореме о двух секущих получаем



$$CM \cdot CV = CN \cdot CA \;\Leftrightarrow\; (c+t)\cdot c = (2c-5)\cdot 2c;$$
$$BM \cdot BV = BK \cdot BA \;\Leftrightarrow\; (c-t)\cdot c = 1 \cdot 4.$$

Из первого равенства следует, что $t = 3c - 10$. Подставляя во второе равенство, имеем $(10-2c)\cdot c = 4 \Leftrightarrow c = \frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$. Отсюда $BC = AC = 2c = 5\pm\sqrt{17}$. Но так как $AC > AN = 5$, подходит только $BC = AC = 5+\sqrt{17}$.

10 КЛАСС. Вариант 8

1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x+18$, седьмой член равен $(x^2-4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x.

Ответ: $x=2$, $x=2\pm\sqrt{7}$.

Решение. Числа A, B, C являются пятым, седьмым и одиннадцатым членами арифметической прогрессии соответственно тогда и только тогда, когда они удовлетворяют соотношению $3B=2A+C$ ($a_7=a_5+2d$, $a_{11}=a_5+6d$). Таким образом, задача сводится к решению уравнения $3\left(x^2-4x\right)^2=-3x^2+2(6x+18)$. Сделав замену $t=x^2-4x$, получаем $3t^2=-3t+36\Leftrightarrow t^2+t-12=0$. Данное уравнение имеет корни $t=-4$ и $t=3$. Далее находим значения x:

$$\left[\begin{array}{l} x^2-4x+4=0, \\ x^2-4x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=2\pm\sqrt{7}. \end{array}\right.$$

2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x+7y$ при условии $\begin{cases} |4x-3y|\leqslant 6, \\ |3x-4y|\leqslant 8. \end{cases}$

Ответ: -146.

Решение. Данная система неравенств эквивалентна следующим:

$$\begin{cases} -6\leqslant 4x-3y\leqslant 6, \\ -8\leqslant 3x-4y\leqslant 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x}{3}-2\leqslant y\leqslant \frac{4x}{3}+2, \\ \frac{3x}{4}-2\leqslant y\leqslant \frac{3x}{4}+2. \end{cases}$$

Первое неравенство задаёт полосу между параллельными прямыми $y=\frac{4x}{3}-2$ и $y=\frac{4x}{3}+2$, а второе – полосу между прямыми $y=\frac{3x}{4}-2$ и $y=\frac{3x}{4}+2$. Их пересечением является параллелограмм с вершинами в точках $P(0;-2)$, $Q\left(-\frac{48}{7};-\frac{50}{7}\right)$, $R(0;2)$, $S\left(\frac{48}{7};\frac{50}{7}\right)$ (координаты вершин можно найти, решив соответствующие системы линейных уравнений).
Рассмотрим уравнение $14x+7y=C$, где C – некоторая константа. Оно задаёт прямую на плоскости, причём в любой точке прямой значение выражения $14x+7y$ постоянно и равно C. Если изменить значение C, получится некоторая другая прямая, на которой выражение $14x+7y$ принимает новое значение. Нам необходимо определить минимальное значение C, при котором прямая $14x+7y=C$ пересекает параллелограмм. Несложно видеть, что при увеличении C прямая движется вверх на плоскости, и самое маленькое C получается, когда прямая проходит через точку Q. Это значение равно $14\cdot\left(-\frac{48}{7}\right)+7\cdot\left(-\frac{50}{7}\right)=-146$.

3. [5 баллов] Найдите все пары (m,n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A=m^2-2mn+n^2+9m-9n$ и $B=m^2n-mn^2+3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q – простые числа.

Ответ: $(7;3)$.

Решение. Число A представимо в виде $A=(m-n)(m-n+9)$. Так как множители имеют разную чётность, A – чётное число. Рассмотрим два случая.
Если $A=3q^2$, то так как A чётное, q также должно быть чётным. Кроме того, q – простое число, следовательно, $q=2$. Отсюда получаем $(m-n)^2+9(m-n)-12=0$. Это уравнение является квадратным относительно $m-n$ и не имеет натуральных корней. Значит, первый случай невозможен.

Следовательно, $A = 13p^2$, и тогда по условию $B = 3q^2$. Рассуждая аналогично, получаем, что $p = 2$. Тогда $(m-n)^2+9(m-n)-52 = 0$, откуда $m-n = -13$ или $m-n = 4$. Перейдём ко второму равенству

$$mn(m-n)+3mn = 3q^2.$$

Если $m-n = -13$, то $-10mn = 3q^2$, что невозможно, так как левая часть отрицательна, а правая – положительна. Если $m-n = 4$, то $7mn = 3q^2$. Отсюда $q = 7$ (так как q – простое). Итак, числа m и n удовлетворяют системе

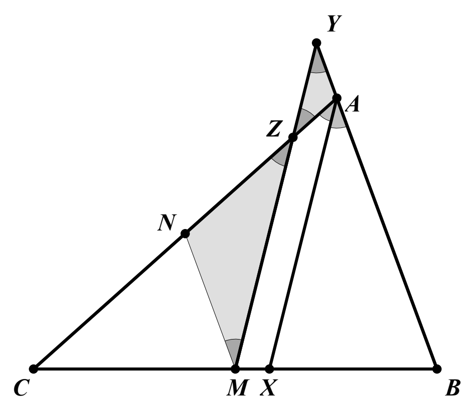
$$\begin{cases} m-n = 4, \\ mn = 21. \end{cases}$$

Её решениями являются пары чисел $(7;3)$, $(-7;-3)$. Так как m и n натуральные, подходит только первая из этих двух пар.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC, проходящая через середину M его стороны BC, пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC, если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.

Ответ: $BC = 14$.

Решение. Обозначим $\angle BAC = 2\alpha$. Тогда $\angle BAX = \angle CAX = \alpha$; за счёт параллельности AX и MY получаем $\angle AYZ = \angle BAX = \alpha$, $\angle AZY = \angle CAX = \alpha$. Пусть MN – средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне AB. Тогда $\angle NMY = \angle BYM = \alpha$. В треугольниках MNZ и AZY есть по два угла, равных α. Значит, они оба равнобедренные и подобны друг другу. Из треугольника AYZ находим, что $\cos\alpha = \frac{YZ}{2\cdot AZ} = \frac{2}{3}$.



Заметим также, что $\angle CNM = 2\alpha$ (внешний угол треугольника MNZ), $CN = \frac{1}{2}AC = 6$; $MN = NZ = AN - AZ = \frac{AC}{2} - AZ = 3$. Кроме того, $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = -\frac{1}{9}$. По теореме косинусов для треугольника MNC получаем

$$MC^2 = MN^2 + CN^2 - 2MN\cdot CN\cdot\cos 2\alpha = 49.$$

Отсюда $BC = 2MC = 14$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y. \end{cases}$

Ответ: $\left(3\sqrt{2} - \frac{1}{2}; 3\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)$.

Решение. Запишем второе уравнение системы в виде $4x^4+x+5\sqrt[4]{x} = 4y^4+y+5\sqrt[4]{y}$. Введя функцию $f(t) = 4t^4 + t + 5\sqrt[4]{t}$, можем переписать это уравнение в виде $f(x) = f(y)$. Функция f строго

возрастает на всей своей области определения (как сумма трёх возрастающих при $t \geqslant 0$ функций). Отсюда следует, что каждое своё значение она принимает один-единственный раз. Значит, $y = x$. Подставляя y в первое уравнение, получаем

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30 - x - x^2}.$$

Обозначим $t = \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x}$. Возводя обе части в квадрат, получаем $t^2 = x + 6 - 2\sqrt{(x+6)(5-x)} + 5 - x$, откуда $2\sqrt{30-x-x^2} = 11 - t^2$. Уравнение принимает вид $t + 5 = 11 - t^2$. Решая его, находим $t = -3$ или $t = 2$. Если $t = 2$, то

$$\sqrt{5-x} + 2 = \sqrt{x+6} \Leftrightarrow 5 - x + 4\sqrt{5-x} + 4 = x + 6 \Leftrightarrow 4\sqrt{5-x} = 2x - 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16(5-x) = (2x-3)^2, \\ 2x - 3 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 \pm \sqrt{72}}{2}, \\ x \leqslant \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3\sqrt{2} - \frac{1}{2}.$$

Если $t = -3$, то $\sqrt{x+6} + 3 = \sqrt{5-x}$. Левая часть этого уравнения – возрастающая функция, а правая – убывающая. Из второго уравнения следует, что $x \geqslant 0$. Значит, минимальное значение левой части равно $\sqrt{6}+3$, а максимальное значение правой есть $\sqrt{5}$ (оба значения принимаются при $x = 0$). Следовательно, в этом случае решений нет. (Разумеется, можно было решить это уравнение аналогично предыдущему, но мы бы получили корень $x < 0$, не удовлетворяющий системе.) Итак, система имеет единственное решение $\left(3\sqrt{2} - \frac{1}{2}; 3\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)$.

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

Ответ: 1 250.

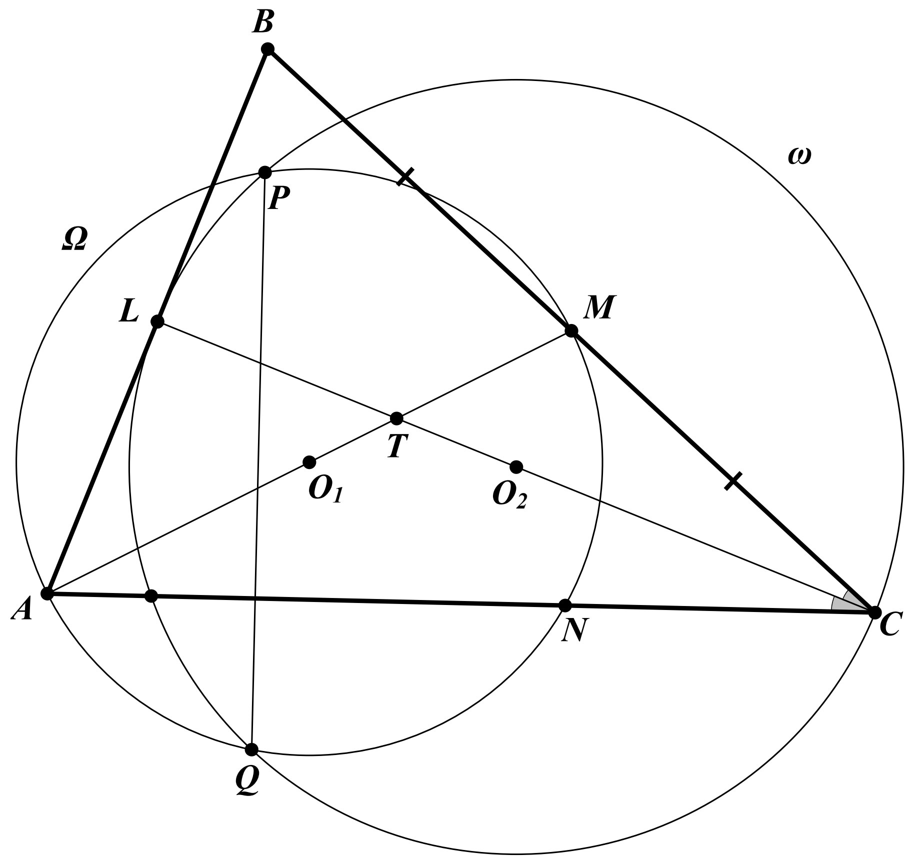
Решение. Зафиксируем положение квадрата (временно запретим повороты) и перекрасим два его узла. Возможны два случая.

- В белый цвет покрашены два узла, симметричных относительно центра квадрата.
- В белый цвет покрашены два узла, не симметричных относительно центра.

В первом случае раскраска переходит сама в себя при повороте на 180°, но не на 90° т. е. все такие раскраски разбиваются на пары считающихся одинаковыми. Во втором случае совмещение с самой собой при поворотах на 90°, 180° и 270° не происходит, поэтому любая такая раскраска совмещается с четырьмя другими раскрасками, а всё множество раскрасок во втором случае разбивается на четвёрки считающихся одинаковыми.
В первом случае количество раскрасок равно $\frac{100}{2}$, поскольку достаточно выбрать лишь один узел, и тогда симметричный ему узел определён однозначно. Во втором случае можно брать любые из C_{100}^2 пар узлов, кроме относящихся к первому случаю, т. е. $C_{100}^2 - \frac{100}{2}$. В итоге получаем, что количество раскрасок равно $\frac{1}{4} \cdot \left(C_{100}^2 - \frac{100}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{100}{2} = 1\,250$.

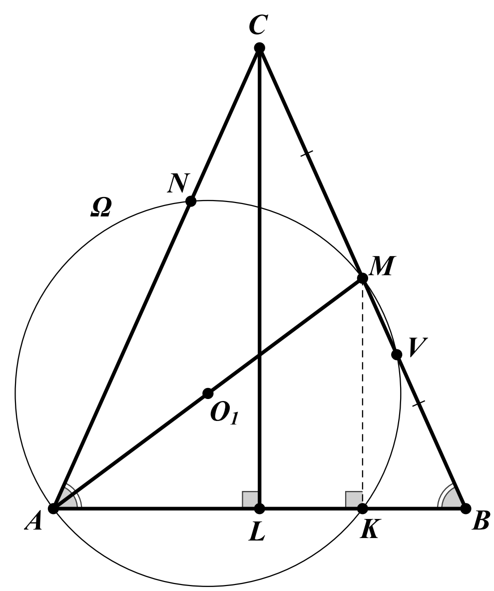
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q. Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC, проведённой из вершины B. Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N. Найдите длины сторон AC и BC, если $AB = 26$, $AN = 20$.

Ответ: $AC = BC = 20 + \sqrt{62}$.



Решение. Пусть T – точка пересечения AM и CL, O_1 и O_2 – середины этих отрезков соответственно. Тогда $O_1O_2 \perp PQ$, откуда $AC \parallel O_1O_2$. Треугольники TO_1O_2 и TAC подобны по двум углам. Обозначим $TO_1 = x$, $TO_2 = y$, $k = \frac{AO_1}{TO_1}$. Тогда $TA = (k+1)x$, $TC = (k+1)y$. Поскольку O_1 и O_2 – середины AM и CL, $MT = AO_1 - TO_1 = (k-1)x$, $LT = CO_2 - TO_2 = (k-1)y$, а значит, $LT : TC = MT : TA$, и треугольники LMT и CAT подобны, откуда $LM \parallel AC$. Следовательно, L – середина стороны AB, отрезок CL является в треугольнике ABC медианой и биссектрисой, поэтому треугольник равнобедренный ($AC = BC$).

Пусть окружность Ω пересекает сторону AB в точке K, а сторону BC вторично пересекает в точке V. Угол MKA прямой, поскольку AM – диаметр окружности, поэтому MK – средняя линия треугольника CBL. Отсюда $BK = \frac{AB}{4} = \frac{13}{2}$. Пусть $CM = c$, $VM = t$. Тогда $CA = CB = 2c$, и по теореме о двух секущих получаем



$$CM \cdot CV = CN \cdot CA \;\Leftrightarrow\; (c+t)\cdot c = (2c-20)\cdot 2c;$$

$$BM \cdot BV = BK \cdot BA \;\Leftrightarrow\; (c-t)\cdot c = \frac{13}{2}\cdot 26.$$

Из первого равенства следует, что $t = 3c - 40$. Подставляя во второе равенство, имеем $(40-2c)\cdot c = 169 \Leftrightarrow c = \frac{20\pm\sqrt{62}}{2}$. Отсюда $BC = AC = 2c = 20\pm\sqrt{62}$. Но так как $AC > AN = 20$, подходит только $BC = AC = 20 + \sqrt{62}$.

10 КЛАСС. Вариант 13

1. [3 балла] В прямоугольном треугольнике длины катетов равны $|2x-2|$ и $|x^2+3x|$, а длина гипотенузы равна $|3x+1|$. Найдите x.

Ответ: $x=-2\pm\sqrt{5}$.

Решение. По теореме Пифагора $(2x-2)^2+(x^2+3x)^2=(3x+1)^2$. Группируя члены и применяя формулу разности квадратов, получаем уравнение $-(x+3)(5x-1)+x^2(x+3)^2=0$, откуда $(x+3)(1-5x+x^3+3x^2)=0$. Одним из корней кубического многочлена в скобках является $x=1$. Раскладывая его на множители (например, выполнив деление на $x-1$ уголком), получаем $(x+3)(x-1)(x^2+4x-1)=0$. Это уравнение имеет корни $x=-3$, $x=1$, $x=-2\pm\sqrt{5}$. Корни $x=1$ и $x=-3$ не удовлетворяют условию, т.к. при них длина одного из катетов равна 0.

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\sqrt{8}+y\sqrt{18}+z\sqrt{29}=\sqrt{32}+\sqrt{116}$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2-y^2+z^2$.

Ответ: 1.

Решение. Так как $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$, $\sqrt{32}=4\sqrt{2}$, $\sqrt{116}=2\sqrt{29}$, данное в условии равенство можно записать в виде

$$(2x+3y-4)\sqrt{2}+(z-2)\sqrt{29}=0.$$

Если $z\neq 2$, то $\frac{2x+3y-4}{2-z}=\sqrt{\frac{29}{2}}$, что невозможно, так как левая часть рациональна, а правая – иррациональна. Следовательно, $z=2$, и тогда $2x+3y=4$. Последнее уравнение можно записать в виде $x=2-y-\frac{y}{2}$. Поскольку x и y – целые числа, отсюда получаем, что и дробь $\frac{y}{2}$ должна быть целой. Пусть $\frac{y}{2}=k$ – тогда $x=2+3k$, $y=-2k$, $k\in\mathbb{Z}$. Значит $x^2-y^2+z^2=5k^2+12k+8$. Это квадратичная функция, графиком которой является парабола с ветвями вверх. Абсцисса вершины параболы $k=-\frac{6}{5}$. Так как переменная может принимать только целочисленные значения, минимум достигается в точке, ближайшей к вершине. Значит, $k=-1$, а соответствующее значение выражения равно 1.

3. [4 балла] Назовём числа *хорошими*, если они представимы в виде $a(a+1)$, где $a\in\mathbb{N}$. Найдите количество пар хороших чисел, разность которых равна $81\cdot 10^{2024}$.

Ответ: 10 125.

Решение. Пусть $a(a+1)$, $b(b+1)$ – хорошие числа. Их разность равна $(a-b)(a+b+1)$. Система

$$\begin{cases} a-b=k, \\ a+b+1=l \end{cases}$$

имеет единственное решение $a=\frac{k+l-1}{2}$, $b=\frac{l-k-1}{2}$. При этом a и b являются натуральными, если числа k и l – числа разной чётности и $l>k+1$ (так как a и b натуральные числа и $a>b$, то $k\in\mathbb{N}$, $l\in\mathbb{N}$). Числа $(a+b)$ и $(a-b+1)$ разной чётности.
Заметим, что каждому представлению числа $81\cdot 10^{2024}$ в виде произведения чётного и нечётного числа соответствует ровно одна пара хороших чисел $a(a+1)$ и $b(b+1)$ (больший множитель будет числом k, меньший – числом l) и наоборот. Так как $81\cdot 10^{2024}=2^{2024}\cdot 3^4\cdot 5^{2024}$, в разложение на простые множители чётного числа двойка входит в 2024-ой степени, тройка – в степени от 0 до 4, пятёрка – в степени от 0 до 2024. Поэтому количество представлений числа $81\cdot 10^{2024}$ в виде произведения чётного и нечётного числа, а, значит, и количество пар хороших чисел, разность которых равна $81\cdot 10^{2024}$, равно $5\cdot 2\,025=10\,125$.

4. [5 баллов] Решите неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}-3} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}}$.

Ответ: $x \in \left[1; \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right) \cup \{2\}$.

Решение. Запишем ОДЗ данного неравенства:

$$\begin{cases} 4x-x^2-3 \geqslant 0, \\ 2x-x^2 \geqslant 0, \\ x^2+x-2 \geqslant 0, \\ 4x-x^2-3 \neq 0, \\ x^2+x-2 \neq 2x-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ x \in (-\infty;-2] \cup [1;+\infty), \\ x \neq 3, x \neq 1, \\ x \neq \frac{1\pm\sqrt{17}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[1; \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}; 2\right]$$

Далее все рассуждения будем проводить для x, принадлежащих ОДЗ.
Так как $\sqrt{4x-x^2-3}-3 = \sqrt{1-(x-2)^2}-3 \leqslant 1-3 < 0$, левая часть исходного неравенства отрицательна. Поэтому те x, для которых правая часть исходного неравенства неотрицательна, являются решениями. Найдём их:

$$\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2} > 0 \Leftrightarrow 2x-x^2 > x^2+x-2 \Leftrightarrow 2x^2-x-2 < 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{17}}{4} < x < \frac{1+\sqrt{17}}{4}.$$

С учётом ОДЗ $x \in \left[1; \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$.
Остаётся рассмотреть случай, когда правая часть исходного неравенства отрицательна, т.е. когда $x \in \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}; 2\right]$. Умножим обе части исходного неравенства на -1:

$$\frac{1}{3-\sqrt{4x-x^2-3}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{2x-x^2}}.$$

Так как знаменатели обеих дробей положительны, это неравенство эквивалентно неравенству

$$\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{2x-x^2} \geqslant 3-\sqrt{4x-x^2-3} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{4x-x^2-3} \geqslant \sqrt{2x-x^2}+3.$$

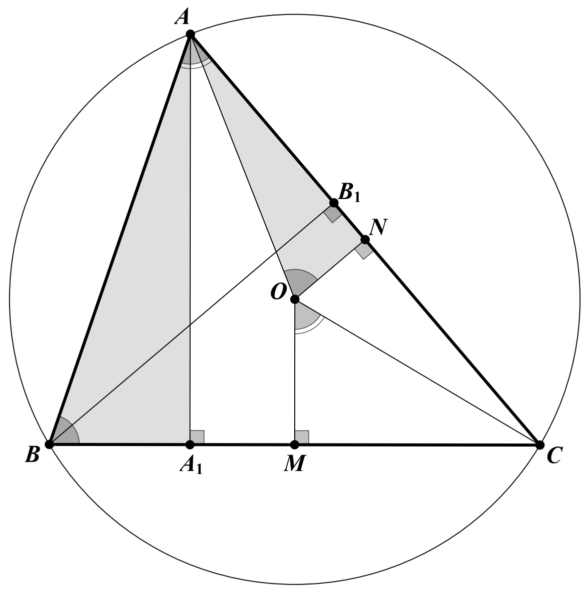
Заметим, что при $x \in \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}; 2\right]$ правая часть не меньше 3, а левая

$$\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{4x-x^2-3} = \sqrt{(x+2)(x-1)}+\sqrt{1-(x-2)^2} \leqslant 2+1 = 3,$$

причём равенство обеих частей достигается только при $x=2$. Значит, в этом случае есть только одно решение – это $x=2$.

5. [5 баллов] Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O, а AA_1 и BB_1 – его высоты. Найдите расстояние от точки O до стороны AC, если $AB_1 = 6$ и площадь треугольника OBA_1 равна 6.

Ответ: 2.



Решение. Пусть M и N – середины BC и AC соответственно. Треугольники BAA_1, ONA подобны как прямоугольные с равными острыми углами $\angle OAN = \angle BAA_1$. (Пусть продолжения AA_1 и AO пересекают окружность в точках D и T соответственно. Так как AT диаметр, $\angle ADT = 90°$. Значит, $DT \parallel BC$. Дуги, заключённый между параллельными хордами, равны. Значит, равны меньшие дуги BD и CT. Углы BAA_1 и OAN опираются на эти дуги.)
Прямоугольные треугольники AB_1B и OMC также подобны ($\angle BAB_1 = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle COM$). Значит,

$$\frac{BA_1}{ON} = \frac{AB}{AO}, \quad \frac{AB_1}{OM} = \frac{AB}{CO}.$$

Поделив первое равенство на второе, получаем $BA_1 \cdot OM = AB_1 \cdot ON$. Но $BA_1 \cdot OM$ есть удвоенная площадь треугольника OBA_1, а $AB_1 \cdot ON$ есть удвоенная площадь треугольника OAB_1, поэтому $S_{OBA_1} = S_{OAB_1} \frac{1}{2} AB_1 \cdot ON$, откуда $ON = \frac{2S_{OBA_1}}{AB_1} = 2$.

6. [4 балла] Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 = 0, \\ 2x - xy - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0. \end{cases}$

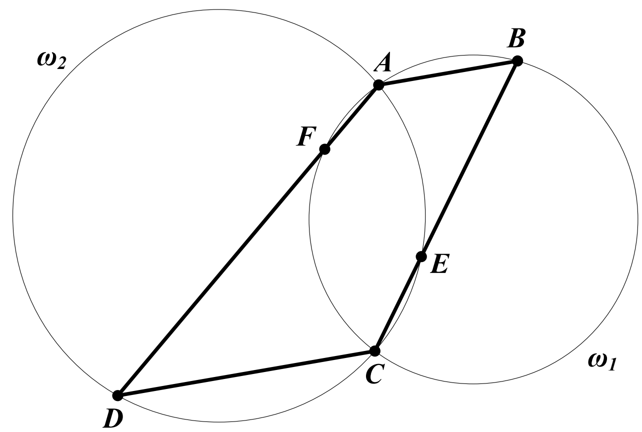
Ответ: $(-1;0)$, $(3;4)$, $\left(2+\sqrt{17}; \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$, $\left(2-\sqrt{17}; \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$.

Решение. Складывая уравнения, получаем

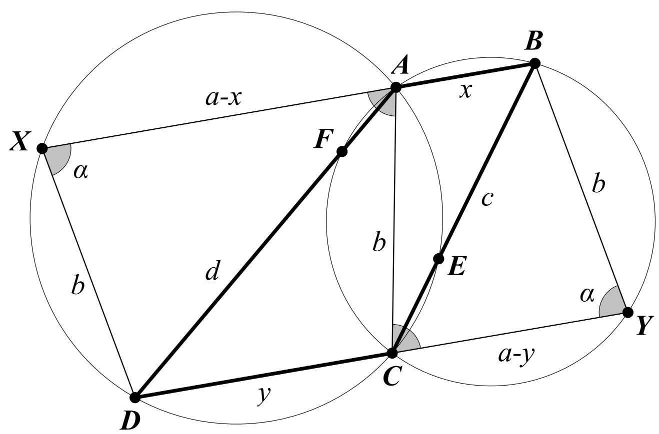
$$x^2 + 2x + 1 - 3xy - 3y + 2y^2 = 0,$$
$$(x+1)^2 - 3(x+1)y + 2y^2 = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $x+1$, находим $x+1 = y$ или $x+1 = 2y$.
Если $x = y - 1$, то второе уравнение исходной системы принимает вид $y^3 - 4y^2 = 0$. Отсюда получаем $y = 0$ (и тогда $x = -1$) или $y = 4$ (и тогда $x = 3$).
Если $x = 2y - 1$, то $y^3 - 3y^2 + 2y = 0$. Тогда или $y = 0$ (и выйдет пара чисел, уже полученная ранее), или $y = \frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$ (при этом $x = 2 \pm \sqrt{17}$).

7. [6 баллов] Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD $(AB < CD)$. Окружность ω_1, описанная около треугольника ABC, повторно пересекает сторону AD в точке F, а окружность ω_2, описанная около треугольника ACD, повторно пересекает сторону BC в точке E (точки E и F расположены так, как показано на рисунке). Найдите отношение длин отрезков AF и CE, если отношение радиуса окружности ω_1 к радиусу окружности ω_2 равно $1 : 2$.



Ответ: $1 : 2$.



Решение. Продолжим AB за точку A до пересечения с окружностью ω_2 в точке X и DC за точку C до пересечения с ω_1 в точке Y. Тогда $BXDY$ – параллелограмм, а $ABYC$ и $ACDX$ – равнобедренные трапеции. Обозначим $DX = AC = BY = b$, $BC = c$, $AD = d$, $AB = x$, $CD = y$, $\angle AXD = \angle XAC = \angle BYC = \alpha$. По теореме о двух секущих получаем

$$BE \cdot BC = BA \cdot BX \Leftrightarrow (c - CE) \cdot c = a \cdot x \Leftrightarrow CE = \frac{c^2 - ax}{c}.$$

Аналогично доказывается, что $AF = \frac{d^2-ay}{d}$. Из равнобедренных трапеций $ABYC$ и $BXDY$ получаем соотношения $b^2 = c^2 - x(a-y) = d^2 - y(a-x)$ (для этого достаточно опустить высоту из вершины меньшего основания на большее, а затем записать теорему Пифагора для двух треугольников). Значит, $c^2 - ax = d^2 - ay$. Но тогда используя полученные выше соотношения, находим

$$\frac{AF}{CE} = \frac{c}{d} = \frac{2R_1 \sin\alpha}{2R_2 \sin\alpha} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{2}.$$

(Здесь R_1, R_2 – радиусы ω_1 и ω_2 соответственно.)

10 КЛАСС. Вариант 14

1. [3 балла] В прямоугольном треугольнике длины катетов равны $|x-1|$ и $|x^2+4x|$, а длина гипотенузы равна $|2x+3|$. Найдите x.

   Ответ: $x = \frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$.

   Решение. По теореме Пифагора $(x-1)^2 + (x^2+4x)^2 = (2x+3)^2$. Группируя члены и применяя формулу разности квадратов, получаем уравнение $-(x+4)(3x+2) + x^2(x+4)^2 = 0$, откуда $(x+4)(-2-3x+x^3+4x^2) = 0$. Одним из корней кубического многочлена в скобках является $x = 1$. Раскладывая его на множители (например, выполнив деление на $x-1$ уголком), получаем $(x+4)(x-1)(x^2+5x+2) = 0$. Это уравнение имеет корни $x=-4$, $x=1$, $x=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$. Корни $x=1$ и $x=-4$ не удовлетворяют условию, т.к. при них длина одного из катетов равна 0.

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\sqrt{2}+y\sqrt{12}+z\sqrt{75} = \sqrt{32}+\sqrt{108}$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2+y^2-z^2$.

   Ответ: 16.

   Решение. Так как $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$, $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, $\sqrt{108} = 6\sqrt{3}$, данное в условии равенство можно записать в виде
$$(x-4)\sqrt{2} + (2y+5z-6)\sqrt{3} = 0.$$

   Если $x \neq 4$, то $\frac{2y+5z-6}{4-x} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, что невозможно, так как левая часть рациональна, а правая – иррациональна. Следовательно, $x = 4$, и тогда $2y+5z = 6$. Последнее уравнение можно записать в виде $y = 3 - \frac{5z}{2}$. Поскольку y и z – целые числа, отсюда получаем, что и дробь $\frac{5z}{2}$ должна быть целой. Пусть $\frac{z}{2} = k$ – тогда $y = 3-5k$, $z = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Значит $x^2+y^2-z^2 = 21k^2-30k+25$. Это квадратичная функция, графиком которой является парабола с ветвями вверх. Абсцисса вершины параболы $k = \frac{5}{7}$. Так как переменная может принимать только целочисленные значения, минимум достигается в точке, ближайшей к вершине. Значит, $k = 1$, а соответствующее значение выражения равно 16.

3. [4 балла] Назовём числа хорошими, если они представимы в виде $a(a+1)$, где $a \in \mathbb{N}$. Найдите количество пар хороших чисел, разность которых равна $343 \cdot 10^{1\,000}$.

   Ответ: 4 004.

   Решение. Пусть $a(a+1)$, $b(b+1)$ – хорошие числа. Их разность равна $(a-b)(a+b+1)$. Система
$$\begin{cases} a-b = k, \\ a+b+1 = l \end{cases}$$
   имеет единственное решение $a = \frac{k+l-1}{2}$, $b = \frac{l-k-1}{2}$. При этом a и b являются натуральными, если числа k и l – числа разной чётности и $l > k+1$ (так как a и b натуральные числа и $a > b$, то $k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$). Числа $(a+b)$ и $(a-b+1)$ разной чётности.
   Заметим, что каждому представлению числа $343 \cdot 10^{1\,000}$ в виде произведения чётного и нечётного числа соответствует ровно одна пара хороших чисел $a(a+1)$ и $b(b+1)$ (больший множитель будет числом k, меньший – числом l) и наоборот. Так как $343 \cdot 10^{1\,000} = 2^{1\,000} \cdot 7^3 \cdot 5^{1\,000}$, в разложение на простые множители чётного числа двойка входит в 1000-ой степени, семёрка – в степени от 0 до 3, пятёрка – в степени от 0 до 1 000. Поэтому количество представлений числа $343 \cdot 10^{1\,000}$ в виде произведения чётного и нечётного числа, а, значит, и количество пар хороших чисел, разность которых равна $343 \cdot 10^{1\,000}$, равно $4 \cdot 1\,001 = 4\,004$.

4. [5 баллов] Решите неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{6x-x^2}-5} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3x-x^2}-\sqrt{x^2-x-2}}$.

Ответ: $x \in \left[2; 1+\sqrt{2}\right) \cup \{3\}$.

Решение. Запишем ОДЗ данного неравенства:

$$\begin{cases} 6x-x^2 \geqslant 0, \\ 3x-x^2 \geqslant 0, \\ x^2-x-2 \geqslant 0, \\ 6x-x^2 \neq 5, \\ x^2-x-2 \neq 3x-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 6, \\ 0 \leqslant x \leqslant 3, \\ x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty), \\ x \neq 5, x \neq 1, \\ x \neq 1 \pm \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[2; \sqrt{2}+1\right) \cup \left(\sqrt{2}+1; 3\right].$$

Далее все рассуждения будем проводить для x, принадлежащих ОДЗ.
Так как $\sqrt{6x-x^2}-5 = \sqrt{9-(x-3)^2}-5 \leqslant 3-5 < 0$, левая часть исходного неравенства отрицательна. Поэтому те x, для которых правая часть исходного неравенства неотрицательна, являются решениями. Найдём их:

$$\sqrt{3x-x^2}-\sqrt{x^2-x-2} > 0 \Leftrightarrow 3x-x^2 > x^2-x-2 \Leftrightarrow x^2-2x-1 < 0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}.$$

С учётом ОДЗ $x \in \left[2; \sqrt{2}+1\right)$.
Остаётся рассмотреть случай, когда правая часть исходного неравенства отрицательна, т.е. когда $x \in \left(\sqrt{2}+1; 3\right]$. Умножим обе части исходного неравенства на -1:

$$\frac{1}{5-\sqrt{6x-x^2}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}-\sqrt{3x-x^2}}.$$

Так как знаменатели обеих дробей положительны, это неравенство эквивалентно неравенству

$$\sqrt{x^2-x-2}-\sqrt{3x-x^2} \geqslant 5-\sqrt{6x-x^2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x-2}+\sqrt{6x-x^2} \geqslant \sqrt{3x-x^2}+5.$$

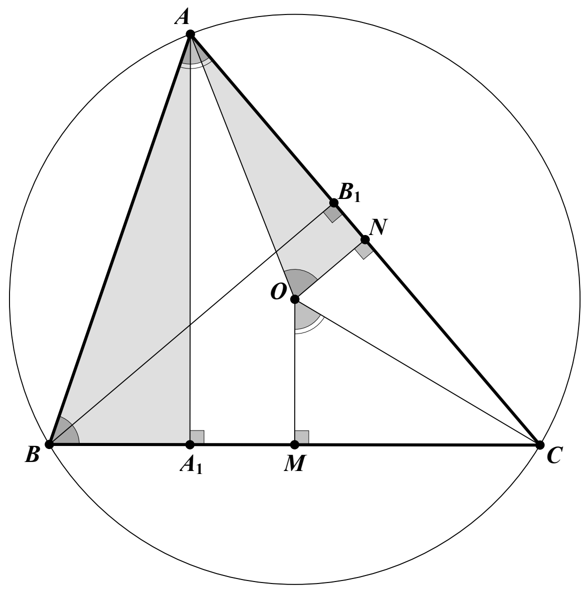
Заметим, что при $x \in \left(\sqrt{2}+1; 3\right]$ правая часть не меньше 5, а левая

$$\sqrt{x^2-x-2}+\sqrt{6x-x^2} = \sqrt{(x-2)(x+1)}+\sqrt{9-(x-3)^2} \leqslant 2+3 = 5,$$

причём равенство обеих частей достигается только при $x=3$. Значит, в этом случае есть только одно решение – это $x=3$.

5. [5 баллов] Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O, а AA_1 и BB_1 – его высоты. Найдите расстояние от точки O до стороны AC, если $AB_1 = 5$, а площадь треугольника OBA_1 равна 3.

Ответ: 1,2.



Решение. Пусть M и N – середины BC и AC соответственно. Треугольники BAA_1, ONA подобны как прямоугольные с равными острыми углами $\angle OAN = \angle BAA_1$. (Пусть продолжения AA_1 и AO пересекают окружность в точках D и T соответственно. Так как AT диаметр, $\angle ADT = 90°$. Значит, $DT \parallel BC$. Дуги, заключённый между параллельными хордами, равны. Значит, равны меньшие дуги BD и CT. Углы BAA_1 и OAN опираются на эти дуги.)
Прямоугольные треугольники AB_1B и OMC также подобны ($\angle BAB_1 = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle COM$). Значит,

$$\frac{BA_1}{ON} = \frac{AB}{AO}, \quad \frac{AB_1}{OM} = \frac{AB}{CO}.$$

Поделив первое равенство на второе, получаем $BA_1 \cdot OM = AB_1 \cdot ON$. Но $BA_1 \cdot OM$ есть удвоенная площадь треугольника OBA_1, а $AB_1 \cdot ON$ есть удвоенная площадь треугольника OAB_1, поэтому $S_{OBA_1} = S_{OAB_1}\frac{1}{2}AB_1 \cdot ON$, откуда $ON = \frac{2S_{OBA_1}}{AB_1} = 1{,}2$.

6. [4 балла] Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 - xy + y + y^3 = 0, \\ 2x + 1 - y^3 - 2y^2 + 2xy = 0. \end{cases}$

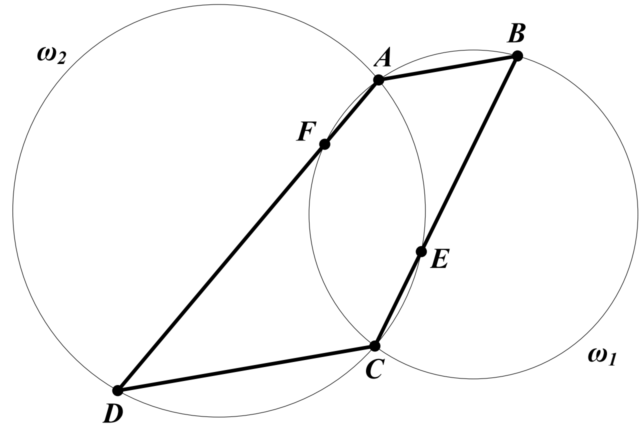
Ответ: $(1; -1)$, $(-2; -1)$, $\left(4 + \sqrt{21}; \frac{-5-\sqrt{21}}{2}\right)$, $\left(4 - \sqrt{21}; \frac{-5+\sqrt{21}}{2}\right)$.

Решение. Складывая уравнения, получаем

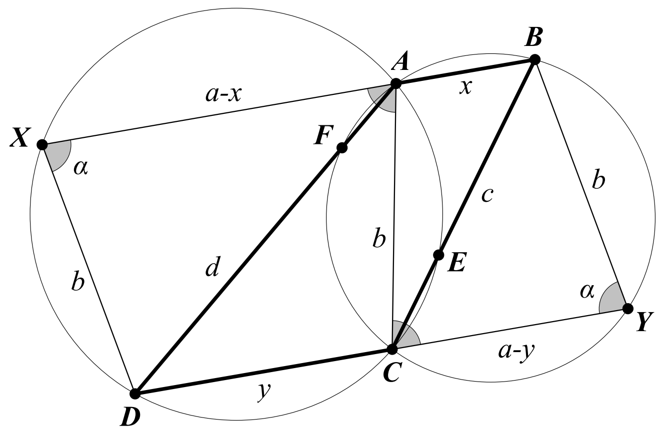
$$x^2 + 2x + 1 + xy + y - 2y^2 = 0,$$
$$(x+1)^2 + (x+1)y - 2y^2 = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $x+1$, находим $x+1 = y$ или $x+1 = -2y$.
Если $x = y-1$, то второе уравнение исходной системы принимает вид $y^3+1 = 0$. Отсюда получаем $y = -1$ (и тогда $x = -2$).
Если $x = -2y-1$, то $y^3 + 6y^2 + 6y + 1 = 0 \Leftrightarrow (y+1)\left(y^2 + 5y + 1\right) = 0$. Тогда или $y = -1$ (и тогда $x = 1$), или $y = \frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$ (при этом $x = 4 \mp \sqrt{21}$).

7. [6 баллов] Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD ($AB < CD$). Окружность ω_1, описанная около треугольника ABC, повторно пересекает сторону AD в точке F, а окружность ω_2, описанная около треугольника ACD, повторно пересекает сторону BC в точке E (точки E и F расположены так, как показано на рисунке). Найдите отношение радиусов окружностей ω_1 и ω_2, если $AF : CE = 3 : 5$.



Ответ: $3 : 5$.



Решение. Продолжим AB за точку A до пересечения с окружностью ω_2 в точке X и DC за точку C до пересечения с ω_1 в точке Y. Тогда $BXDY$ – параллелограмм, а $ABYC$ и $ACDX$ – равнобедренные трапеции. Обозначим $DX = AC = BY = b$, $BC = c$, $AD = d$, $AB = x$, $CD = y$, $\angle AXD = \angle XAC = \angle BYC = \alpha$. По теореме о двух секущих получаем

$$BE \cdot BC = BA \cdot BX \Leftrightarrow (c - CE) \cdot c = a \cdot x \Leftrightarrow CE = \frac{c^2 - ax}{c}.$$

Аналогично доказывается, что $AF = \frac{d^2 - ay}{d}$. Из равнобедренных трапеций $ABYC$ и $BXDY$ получаем соотношения $b^2 = c^2 - x(a-y) = d^2 - y(a-x)$ (для этого достаточно опустить высоту из вершины меньшего основания на большее, а затем записать теорему Пифагора для двух треугольников). Значит, $c^2 - ax = d^2 - ay$. Но тогда используя полученные выше соотношения, находим

$$\frac{AF}{CE} = \frac{c}{d} = \frac{2R_1 \sin\alpha}{2R_2 \sin\alpha} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{3}{5}.$$

(Здесь R_1, R_2 – радиусы ω_1 и ω_2 соответственно.)