10 класс – день 1

1. а) Три натуральных числа являются последовательными членами геометрической прогрессии. Если из второго вычесть 3, а из третьего вычесть 14, то получатся три последовательных члена арифметической прогрессии. Чему равна сумма трёх членов геометрической прогрессии, если разность арифметической прогрессии равна 1?

   Ответ: 26.

   Решение. Обозначим первый член обеих прогрессий a, а знаменатель геометрической прогрессии – q. Тогда

$$\begin{cases} aq - 3 = a + 1, \\ aq^2 - 14 = a + 2. \end{cases}$$

   Отсюда $q = 3$, $a = 2$ и $S_3 = a(1 + q + q^2) = 26$.

   б) Три натуральных числа являются последовательными членами геометрической прогрессии. Если из второго вычесть 1, а из третьего вычесть 6, то получатся три последовательных члена арифметической прогрессии. Чему равна сумма трёх членов геометрической прогрессии, если разность арифметической прогрессии равна 1?

   Ответ: 13.

   в) Три натуральных числа являются последовательными членами геометрической прогрессии. Если из второго вычесть 1, а из третьего вычесть 11, то получатся три последовательных члена арифметической прогрессии. Чему равна сумма трёх членов геометрической прогрессии, если разность арифметической прогрессии равна 2?

   Ответ: 21.

   г) Три натуральных числа являются последовательными членами геометрической прогрессии. Если из второго вычесть 2, а из третьего вычесть 12, то получатся три последовательных члена арифметической прогрессии. Чему равна сумма трёх членов геометрической прогрессии, если разность арифметической прогрессии равна 2?

   Ответ: 26.

   д) Три натуральных числа являются последовательными членами геометрической прогрессии. Если из второго вычесть 1, а из третьего вычесть 4, то получатся три последовательных члена арифметической прогрессии. Чему равна сумма трёх членов геометрической прогрессии, если разность арифметической прогрессии равна 1?

   Ответ: 14.

2. а) Найдите количество десятибуквенных «слов», составленных из букв А, Б, В (под «словом» понимается любая последовательность подряд идущих букв) таких, что в них есть не более трёх букв Б.

Ответ: 33 024.

Решение. Пусть нужно посчитать количество «слов» из n букв. Если букв Б нет, то на каждую позицию можно выбрать одну из двух букв – получаем 2^n слов. Если буква Б одна, то сначала есть n способов её разместить, после чего на оставшиеся позиции есть по два варианта – выходит $n \cdot 2^{n-1}$ слов. Если две буквы Б, то есть C_n^2 способа их разместить, а затем 2^{n-2} способов выбрать остальные буквы – т. е. $n(n-1) \cdot 2^{n-3}$ слов. Аналогично для трёх букв Б получаем $C_n^3 \cdot 2^{n-3}$ слов. В итоге есть $2^n + 2^{n-1} \cdot C_n^1 + 2^{n-2} \cdot C_n^2 + 2^{n-3} \cdot C_n^3$ слов. Если $n = 10$, то это число равно 33 024.

Замечание. Если считать, что каждая из букв А, Б, В должна встретиться в «слове» хотя бы один раз, то получим $n\left(2^{n-1} - 2\right)$ случаев с одной буквой Б: n способов выбора места для буквы Б; 2^{n-1} способов выбора букв на оставшиеся места, из которых не подходят ровно два (все буквы А или все буквы В); $C_n^2\left(2^{n-2} - 2\right)$ случаев с двумя буквами Б; $C_n^3\left(2^{n-1} - 2\right)$ случаев с тремя буквами Б. В сумме выходит

$$n\left(2^{n-1} - 2\right) + \frac{n(n-1)}{2}\left(2^{n-2} - 2\right) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\left(2^{n-3} - 2\right)$$

способов.

б) Найдите количество одиннадцатибуквенных «слов», составленных из букв А, Б, В (под «словом» понимается любая последовательность подряд идущих букв) таких, что в них есть не более трёх букв Б.

Ответ: 83 712.

в) Найдите количество двенадцатибуквенных «слов», составленных из букв А, Б, В (под «словом» понимается любая последовательность подряд идущих букв) таких, что в них есть не более трёх букв Б.

Ответ: 208 896.

г) Найдите количество тринадцатибуквенных «слов», составленных из букв А, Б, В (под «словом» понимается любая последовательность подряд идущих букв) таких, что в них есть не более трёх букв Б.

Ответ: 514 048.

д) Найдите количество четырнадцатибуквенных «слов», составленных из букв А, Б, В (под «словом» понимается любая последовательность подряд идущих букв) таких, что в них есть не более трёх букв Б.

Ответ: 1 249 280.

3. а) Сколько существует квадратных трёхчленов вида x^2+ax+b с целыми корнями, у которых $a+b=19$?
Ответ: 6.
Решение. Пусть x_1 и x_2 – целые корни трёхчлена x^2+ax+b. Тогда $a=-(x_1+x_2)$, $b=x_1x_2$. Значит, $19=a+b=(x_1-1)(x_2-1)-1$, т. е. $(x_1-1)(x_2-1)=20$. Так как $20=2^2\cdot 5$, число 20 может быть представлено в виде произведения двух целых чисел только следующими 6 способами: $20=1\cdot 20=2\cdot 10=4\cdot 5=(-1)\cdot(-20)=(-2)\cdot(-10)=(-4)\cdot(-5)$. Каждому из этих 6 способов соответствует свой квадратный трёхчлен.

б) Сколько существует квадратных трёхчленов вида x^2+ax+b с целыми корнями, у которых $a+b=27$?
Ответ: 6.

в) Сколько существует квадратных трёхчленов вида x^2+ax+b с целыми корнями, у которых $a+b=44$?
Ответ: 6.

д) Сколько существует квадратных трёхчленов вида x^2+ax+b с целыми корнями, у которых $a+b=41$?
Ответ: 8.

д) Сколько существует квадратных трёхчленов вида x^2+ax+b с целыми корнями, у которых $a+b=29$?
Ответ: 8.

4. а) Когда каждое из 15 последовательных натуральных чисел уменьшили на 2, произведение этих чисел уменьшилось в 3 раза. Найдите наименьшее из 15 исходных чисел.
Ответ: 22.
Решение. Пусть меньшее из данных в условии чисел равно k. Тогда произведение всех 15 чисел есть $k(k+1)(k+2)\cdot\ldots\cdot(k+14)$. Если каждое из чисел уменьшить на 2, то произведение чисел станет равным $(k-2)(k-1)k\cdot\ldots\cdot(k+12)$. Отношение первого произведения ко второму равно $\frac{(k+14)(k+13)}{(k-2)(k-1)}=3$. Решая это уравнение, получаем $k=22$ или $k=-4$. Очевидно, условию задачи удовлетворяет только положительное значение k.

б) Когда каждое из 9 последовательных натуральных чисел уменьшили на 2, произведение этих чисел уменьшилось в 2,5 раза. Найдите наименьшее из 9 исходных чисел.
Ответ: 17.

в) Когда каждое из 14 последовательных натуральных чисел уменьшили на 2, произведение этих чисел уменьшилось в 4,5 раза. Найдите наименьшее из 14 исходных чисел.
Ответ: 14.

г) Когда каждое из 6 последовательных натуральных чисел уменьшили на 2, произведение этих чисел уменьшилось в 2 раза. Найдите наименьшее из 6 исходных чисел.
Ответ: 16.

д) Когда каждое из 27 последовательных натуральных чисел уменьшили на 2, произведение этих чисел уменьшилось в 10 раз. Найдите наименьшее из 27 исходных чисел.
Ответ: 14.

5. а) Маша и Даша должны посадить по 80 кустиков клубники каждая. Маша первую половину работы делает с некоторой фиксированной скоростью, а при выполнении второй половины работы увеличивает скорость на 3 кустика в час. Даша первую половину работы проделывает со скоростью в $\frac{7}{6}$ раз больше Машиной, а на вторую половину работы она увеличивает свою скорость ещё на два кустика в час. Известно, что Маша на всю работу затратила не менее 6 часов, а Даша – не более $\frac{75}{14}$ часов. Сколько кустиков в час высаживала Маша первоначально?

Ответ: 12.

Решение. Пусть Маша первоначально высаживает x кустиков в час; тогда Даша высаживает $\frac{7}{6}x$ кустиков в час. Получаем систему неравенств $\begin{cases} \frac{40}{x}+\frac{40}{x+3}\geqslant 6, \\ \frac{40}{7x/6}+\frac{40}{2+7x/6}\leqslant\frac{75}{14}. \end{cases}$ У этой системы единственное положительное решение $x=12$.

б) Маша и Даша должны посадить по 100 кустиков клубники каждая. Маша первую половину работы делает с некоторой фиксированной скоростью, а при выполнении второй половины работы увеличивает скорость на 3 кустика в час. Даша первую половину работы проделывает со скоростью в $\frac{4}{3}$ раз больше Машиной, а на вторую половину работы она увеличивает свою скорость ещё на два кустика в час. Известно, что Маша на всю работу затратила не менее $\frac{125}{9}$ часов, а Даша – не более $\frac{45}{4}$ часов. Сколько кустиков в час высаживала Маша первоначально?

Ответ: 6.

в) Маша и Даша должны посадить по 56 кустиков клубники каждая. Маша первую половину работы делает с некоторой фиксированной скоростью, а при выполнении второй половины работы увеличивает скорость на 2 кустика в час. Даша первую половину работы проделывает со скоростью в $\frac{7}{8}$ раз больше Машиной (т.е. скорость Даши есть $\frac{7}{8}$ скорости Маши), а на вторую половину работы она увеличивает свою скорость ещё на пять кустиков в час. Известно, что Маша на всю работу затратила не более 6,3 часов, а Даша – не менее $\frac{19}{3}$ часов. Сколько кустиков в час высаживала Маша первоначально?

Ответ: 8.

г) Маша и Даша должны посадить по 84 кустика клубники каждая. Маша первую половину работы делает с некоторой фиксированной скоростью, а при выполнении второй половины работы увеличивает скорость на 5 кустиков в час. Даша первую половину работы проделывает со скоростью в $\frac{10}{7}$ раз больше Машиной, а на вторую половину работы она увеличивает свою скорость ещё на два кустика в час. Известно, что Маша на всю работу затратила не менее 9,5 часов, а Даша – не более 7,7 часов. Сколько кустиков в час высаживала Маша первоначально?

Ответ: 7.

д) Маша и Даша должны посадить по 96 кустиков клубники каждая. Маша первую половину работы делает с некоторой фиксированной скоростью, а при выполнении второй половины работы увеличивает скорость на 2 кустика в час. Даша первую половину работы проделывает со скоростью в 1,2 раз больше Машиной, а на вторую половину работы она увеличивает свою скорость ещё на четыре кустика в час. Известно, что Маша на всю работу затратила не менее 8,8 часов, а Даша – не более 7 часов. Сколько кустиков в час высаживала Маша первоначально?

Ответ: 10.

6. а) Диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке O. Известно, что $OB = 15$, $OC = 12$, $OD = 25$, $CD = \sqrt{769}$. Найдите AB.
Ответ: 25.
Решение. Заметим, что $CD^2 = CO^2 + DO^2$, поэтому $\angle COD = 90°$. Из подобия треугольников ADO и CBO следует, что $AO = DO \cdot OC : OB = 20$. Значит, $AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = 25$.

б) Диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке O. Известно, что $OB = 3$, $OC = 2$, $OD = 6$, $CD = 2\sqrt{10}$. Найдите AB.
Ответ: 5.

в) Диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке O. Известно, что $OB = 6$, $OC = 3$, $OD = 16$, $CD = \sqrt{265}$. Найдите AB.
Ответ: 10.

г) Диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке O. Известно, что $OB = 9$, $OC = 6$, $OD = 18$, $CD = 6\sqrt{10}$. Найдите AB.
Ответ: 15.

д) Диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке O. Известно, что $OB = 12$, $OC = 6$, $OD = 32$, $CD = 2\sqrt{265}$. Найдите AB.
Ответ: 20.

7. а) На факультете учится 100 студентов. До зачёта каждые два студента встретились хотя бы на одной лекции по истории. При этом на каждой лекции по истории было не больше 50 студентов. Какое наименьшее число лекций по истории могло пройти до зачёта?
Ответ: 6.
Решение. Разобьём студентов на четыре группы по 25 человек. Пусть на каждую из 6 лекций приходят какие-то 2 группы, причем на разных лекциях пары групп разные. Количество способов выбрать 2 группы из 4 равно 6. Поэтому каждые два студента встретятся хотя бы на одной лекции.
Покажем, что если лекций не больше 5, то найдутся два студента, которые не встретились на лекциях. Действительно, количество «посещений» лекций студентами было не больше $50 \cdot 5 = 250$. Так как студентов 100, найдётся студент который посетил не более 2 лекций. Но на каждой лекции он встретил не более 49 других студентов, значит, всего не более $49 \cdot 2 = 98$ из остальных 99.

б) На факультете учится 60 студентов. До зачёта каждые два студента встретились хотя бы на одной лекции по истории. При этом на каждой лекции по истории было не больше 30 студентов. Какое наименьшее число лекций по истории могло пройти до зачёта?
Ответ: 6.

в) На факультете учится 80 студентов. До зачёта каждые два студента встретились хотя бы на одной лекции по истории. При этом на каждой лекции по истории было не больше 40 студентов. Какое наименьшее число лекций по истории могло пройти до зачёта?
Ответ: 6.

г) На факультете учится 120 студентов. До зачёта каждые два студента встретились хотя бы на одной лекции по истории. При этом на каждой лекции по истории было не больше 60 студентов. Какое наименьшее число лекций по истории могло пройти до зачёта?
Ответ: 6.

д) На факультете учится 140 студентов. До зачёта каждые два студента встретились хотя бы на одной лекции по истории. При этом на каждой лекции по истории было не больше 70 студентов. Какое наименьшее число лекций по истории могло пройти до зачёта?
Ответ: 6.

8. а) За круглый стол сели 126 мудрецов. Часть из них в синих колпаках, остальные – в красных. Известно, что среди любых пяти мудрецов, сидящих подряд, найдутся по крайней мере двое в красных колпаках. Какое наименьшее количество мудрецов может быть в красных колпаках?
Ответ: 51.
Решение. Выбрав мудреца в красном колпаке (такой найдётся), разобьём остальных на 25 пятерок подряд сидящих. Тогда есть не менее чем $25 \cdot 2 + 1 = 51$ мудрец в красных колпаках. Для построения примера занумеруем мудрецов по кругу и дадим красные колпаки 1, 3, 6, 8, ..., 126-му.

б) За круглый стол сел 161 мудрец. Часть из них в синих колпаках, остальные – в красных. Известно, что среди любых пяти мудрецов, сидящих подряд, найдутся по крайней мере двое в красных колпаках. Какое наименьшее количество мудрецов может быть в красных колпаках?
Ответ: 65.

в) За круглый стол сели 176 мудрецов. Часть из них в синих колпаках, остальные – в красных. Известно, что среди любых пяти мудрецов, сидящих подряд, найдутся по крайней мере двое в красных колпаках. Какое наименьшее количество мудрецов может быть в красных колпаках?
Ответ: 71.

г) За круглый стол сели 216 мудрецов. Часть из них в синих колпаках, остальные – в красных. Известно, что среди любых пяти мудрецов, сидящих подряд, найдутся по крайней мере двое в красных колпаках. Какое наименьшее количество мудрецов может быть в красных колпаках?
Ответ: 87.

д) За круглый стол сел 241 мудрец. Часть из них в синих колпаках, остальные – в красных. Известно, что среди любых пяти мудрецов, сидящих подряд, найдутся по крайней мере двое в красных колпаках. Какое наименьшее количество мудрецов может быть в красных колпаках?
Ответ: 97.

9. а) Про многочлен $q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ известно, что каждый из коэффициентов $a_0, \ldots, a_5$ равен либо $+1$, либо -1, а значение $q(2) = -37$. Найдите $q(-3)$.
Ответ: 148.
Решение. Заметим, что 2^5 больше, чем $a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + 2^3a_3 + 2^4a_4$ при любых значениях $a_i = \pm 1$. Поэтому числа $q(2)$ и a_5 имеют один и тот же знак, а значит, $a_5 = -1$.
Вычтем теперь из $q(2)$ значение $a_5 \cdot 2^5$ и получим, что многочлен $q_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ в точке 2 принимает значение -5. Вновь, знак $q_1(2)$ совпадает со знаком a_4, поэтому $a_4 = -1$. Аналогично находятся и остальные значения a_i: многочлен $q(x)$ равен $-x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - x + 1$.

б) Про многочлен $q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ известно, что каждый из коэффициентов $a_0, \ldots, a_5$ равен либо $+1$, либо -1, а значение $q(2) = -13$. Найдите $q(-3)$.
Ответ: 292.

в) Про многочлен $q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ известно, что каждый из коэффициентов $a_0, \ldots, a_5$ равен либо $+1$, либо -1, а значение $q(2) = 51$. Найдите $q(-3)$.
Ответ: -194.

г) Про многочлен $q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ известно, что каждый из коэффициентов $a_0, \ldots, a_5$ равен либо $+1$, либо -1, а значение $q(2) = 19$. Найдите $q(-3)$.
Ответ: -356.

д) Про многочлен $q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ известно, что каждый из коэффициентов $a_0, \ldots, a_5$ равен либо $+1$, либо -1, а значение $q(2) = 27$. Найдите $q(-3)$.
Ответ: -338.

10. а) Точки P и Q – середины сторон AB и AC треугольника ABC соответственно, а X – точка пересечения перпендикуляра к AB, проходящего через точку A, с перпендикуляром к BC, проходящим через точку Q. Найдите длину отрезка BC, если известно, что $PX = 29$, а угол BAC острый и $\sin\angle BAC = \frac{1}{8}$.

Ответ: 7,25.

Решение. Пусть O – центр окружности, описанной около треугольника ABC, а BF – её диаметр. Тогда $\angle BAF = \angle BCF = 90°$ как вписанные углы, опирающиеся на диаметр. Следовательно, $QX \parallel CF$. Так как QX проходит через середину одной стороны треугольника ACF и параллельна его другой стороне, то QX – средняя линия, и точка X – середина AF. Отметим также, что $OP \perp AB$, $OX \perp AF$, так как точки P и Q – середины хорд AB и AF.

Получаем, что $APOX$ – прямоугольник, поэтому $R = AO = PX = 29$. По теореме синусов $BC = 2R\sin\angle BAC = 2 \cdot 29 \cdot \frac{1}{8} = 7{,}25$.

б) Точки P и Q – середины сторон AB и AC треугольника ABC соответственно, а X – точка пересечения перпендикуляра к AB, проходящего через точку A, с перпендикуляром к BC, проходящим через точку Q. Найдите длину отрезка BC, если известно, что $PX = 33$, а угол BAC острый и $\sin\angle BAC = \frac{1}{12}$.

Ответ: 5,5.

в) Точки P и Q – середины сторон AB и AC треугольника ABC соответственно, а X – точка пересечения перпендикуляра к AB, проходящего через точку A, с перпендикуляром к BC, проходящим через точку Q. Найдите длину отрезка BC, если известно, что $PX = 28$, а угол BAC острый и $\sin\angle BAC = \frac{3}{25}$.

Ответ: 6,72.

г) Точки P и Q – середины сторон AB и AC треугольника ABC соответственно, а X – точка пересечения перпендикуляра к AB, проходящего через точку A, с перпендикуляром к BC, проходящим через точку Q. Найдите длину отрезка BC, если известно, что $PX = 55$, а угол BAC острый и $\sin\angle BAC = \frac{5}{22}$.

Ответ: 25.

д) Точки P и Q – середины сторон AB и AC треугольника ABC соответственно, а X – точка пересечения перпендикуляра к AB, проходящего через точку A, с перпендикуляром к BC, проходящим через точку Q. Найдите длину отрезка BC, если известно, что $PX = 39$, а угол BAC острый и $\sin\angle BAC = \frac{5}{12}$.

Ответ: 32,5.